



Etude et réalisation de transducteurs composites pour l'imagerie acoustique et le contrôle non-destructif

Mikaël Wilm

► To cite this version:

Mikaël Wilm. Etude et réalisation de transducteurs composites pour l'imagerie acoustique et le contrôle non-destructif. Acoustique [physics.class-ph]. Université de Franche-Comté, 2004. Français. NNT: . tel-00011338

HAL Id: tel-00011338

<https://theses.hal.science/tel-00011338>

Submitted on 10 Jan 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Etude et réalisation de transducteurs composites pour l'imagerie acoustique et le contrôle non-destructif

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 26 novembre 2004

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Franche-Comté

(spécialité Sciences Pour l'Ingénieur)

par

Mikaël WILM

Composition du jury

Président : B. CRETIN, Professeur à l'ENSMM, Besançon

Rapporteurs : A.-C. HLADKY-HENNION, HDR, Chargée de Recherche CNRS, Lille
M. LETHIECQ, HDR, Professeur à l'Université François Rabelais, Tours

Examineurs : P. LAUGIER, Directeur de Recherche CNRS, Paris
B. DJAFARI-ROUHANI, Professeur à l'Université de Lille 1, Villeneuve d'Ascq

Invités : J.-F. GELLY, Directeur technique de Parallel Design SAS, Sophia-Antipolis
O. BURAT, Responsable technique à Framatome-ANP, Saint-Marcel

Directeur de thèse : S. BALLANDRAS, Directeur de Recherche CNRS, Besançon

Etude et réalisation de transducteurs composites pour l'imagerie acoustique et le contrôle non-destructif

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 26 novembre 2004

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Franche-Comté
(spécialité Sciences Pour l'Ingénieur)

par

Mikaël WILM

Composition du jury

Président : B. CRETIN, Professeur à l'ENSMM, Besançon

Rapporteurs : A.-C. HLADKY-HENNION, HDR, Chargée de Recherche CNRS, Lille
M. LETHIECQ, HDR, Professeur à l'Université François Rabelais, Tours

Examineurs : P. LAUGIER, Directeur de Recherche CNRS, Paris
B. DJAFARI-ROUHANI, Professeur à l'Université de Lille 1, Villeneuve d'Ascq

Invités : J.-F. GELLY, Directeur technique de Parallel Design SAS, Sophia-Antipolis
O. BURAT, Responsable technique à Framatome-ANP, Saint-Marcel

Directeur de thèse : S. BALLANDRAS, Directeur de Recherche CNRS, Besançon

Remerciements

Ces travaux de doctorat ont été menés au LPMO au sein de l'équipe "acoustique et microsonique", en collaboration avec Thales Ultrasound Probes devenu par la suite Parallel Design SAS et le Centre Technique de Framatome-ANP à Saint-Marcel.

Je tiens tout d'abord à remercier Messieurs Daniel Hauden et Bernard Cretin qui m'ont accueilli successivement au sein du LPMO.

Je remercie vivement Monsieur Sylvain Ballandras, qui m'a encadré en manifestant toujours le même enthousiasme et avec qui j'ai pris grand plaisir à discuter tout au long de ces travaux. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir laissé dépasser le cadre initial de mes recherches, permettant d'enrichir ce travail par de nouvelles approches, et d'autre part de s'être inquiété dès le départ de mes aspirations concernant mon projet professionnel d'avenir.

Je remercie également les membres du jury :

- Madame Hladky-Hennion et Monsieur Lethiecq, qui ont eu la rude tâche de rapporteurs du présent manuscrit,
- Messieurs Djafari-Rouhani et Laugier, qui ont accepté d'examiner ce travail,
- Messieurs Burat et Gelly, avec qui j'ai travaillé tout au long de ces années et qui m'ont laissé, en tant que partenaires industriels, une grande marge de manœuvre pour arriver à ce résultat.

Je souhaite de même remercier Monsieur Frédéric Lantéri, de Parallel Design, dont la collaboration au quotidien s'est avérée très fructueuse.

Il m'a aussi été donné le privilège de travailler au sein d'une équipe qui n'usurpe pas ce titre, bien au contraire. Je remercie en particulier Vincent Laude et Abdelkrim Khelif pour les discussions nombreuses et les séances de "brainstorming" qui nous ont permis de partager nos réflexions communes, ainsi que William Daniau pour son aide technologique et informatique. Merci à l'ensemble de l'équipe pour la disponibilité et la convivialité de chacun.

Je n'oublie pas Raphaël Armatti, qui a temporairement appartenu à cette équipe et nous a apporté un réel progrès quant à la visualisation et aux possibilités d'interprétation de nos résultats. Je lui souhaite bon vent pour la suite de ces études et son avenir tant professionnel que personnel. Merci Raph et au plaisir de te revoir.

Une vie de thésard ne serait pas ce qu'elle est sans... les thésards (et assimilés !). Merci aux anciennes générations comme aux nouvelles pour les ambiances qu'elles ont su créer. Merci donc à Raphaël P., Serge, Manue, Tristan, J.R., au petit Tom, à Bruno, Cédric et j'en oublie pour les "anciens", à Julien, Zouzou dit le Forain, John, Rémi, Cyrille, Alex (l'alsacien du 93 !), Gino "Lancelot", Charles (mon frère de rédaction), Stan, Jay, Mickaël, Rachid, "le" PYB, Rodolphe, Gaël, Damien et bien sûr Sarah dont les regards noirs de "sorcière" me manqueront. J'espère que les oubliés me pardonneront. Pour les "assimilés", j'ai déjà salué Raph. Je n'oublie pas bien sûr Gwladys et Nico (et sa "maison du seigneur"), et enfin Sandrine "Miss Communication".

Je tiens aussi à saluer tout particulièrement Wilfrid Boireau et Frédéric Chérioux (notre "bûcheron du Jura") ainsi que leurs familles pour leur accueil. Fred, ta finesse coutumière me manquera ! Bon courage aussi à Yannick pour sa rédaction.

Je remercie bien entendu l'ensemble du labo, et tous ceux que je n'ai pas cités, pour leur accueil durant ces quelques années qu'ont duré successivement mon projet de fin d'étude, mon DEA et enfin mon doctorat, avec un dernier clin d'œil à Joëlle et à Pierre.

Merci enfin à ma famille (et belle-famille !) pour son soutien à tous les niveaux.

à ma mère

Table des matières

Introduction générale	1
------------------------------	----------

Partie I Notions générales

Chapitre 1 Ultrasons et piézoélectricité	7
1.1 Ondes ultrasonores	7
1.2 L'effet piézoélectrique	9
Chapitre 2 Sondes ultrasonores à ondes de volume	11
2.1 Sondes mono-éléments	11
2.2 Qualité d'une image	13
2.3 Sondes multi-éléments	14
2.3.1 Description et fonctionnement	14
2.3.2 Ouverture synthétique et directivité	17
2.4 La technologie des composites piézoélectriques ou <i>piézocomposites</i>	20
2.4.1 Classification	20
2.4.2 Fabrication	21
2.4.3 Propriétés pour le mode d'épaisseur	21
2.4.4 Avantages technologiques	24
2.4.5 Modes latéraux	25
Chapitre 3 Effets de diaphonie dans les sondes multi-éléments : concepts et caractérisation	29
3.1 Origine de la diaphonie	29
3.2 Grandeurs harmoniques et mutuelles	32
3.2.1 Définition de l'admittance harmonique et des admittances mutuelles	32
3.2.2 Réponse mécanique, directivité et bande passante	35
3.2.3 Electrodes recouvrant plusieurs périodes	35
3.2.4 Vers une réduction du problème	37

Partie II Méthodes de simulation

Introduction	41
Chapitre 4 Préambules	43
4.1 Modèle unidimensionnel	43
4.1.1 Le transducteur comme résonateur	43
4.1.2 Circuits équivalents	45
4.2 Mise en équations du problème piézoélectrique	47
4.2.1 Conventions de notation	47
4.2.2 Préambule : résultats de l'élasticité	48
4.2.3 Equations constitutives	48
4.2.4 Equations d'équilibre	49
4.2.5 Thermodynamique des solides	50
Chapitre 5 Méthode des éléments finis appliquée aux structures multi-périodiques rayonnantes	53
5.1 Théorie des éléments finis piézoélectriques	54
5.1.1 Principe de Hamilton en élasticité pure	54
5.1.2 Cas de la piézo-électricité	55
5.1.3 Discrétisation	57
5.2 Etapes de la résolution	59
5.3 Conditions de périodicité	59
5.3.1 Théorème de Bloch-Floquet appliqué aux réseaux bidimensionnels	59
5.3.2 Cas de la cellule hexagonale	61
5.3.3 Traitement des conditions de périodicité	62
Spécificités de la bibliothèque d'éléments finis Modulef	62
Application aux conditions de périodicité	62
5.3.4 Premiers résultats	64
5.4 Rayonnement des structures périodiques	67
5.4.1 Rayonnement acoustique de sources ponctuelles (monopôles) en milieu fluide	67
5.4.2 Le problème fluide/structure	68
Equations du problème	68
Forme intégrale de la pression acoustique	69
5.4.3 Problème fluide/structure : cas des structures périodiques	71
5.4.4 Problème général : rayonnement dans un solide	75
5.4.5 Généralisation du tenseur de Green périodique et rayonnement d'un réseau hexagonal	77
5.5 Conclusion	77

Chapitre 6 Développement en ondes planes pour l'étude des composites	79
6.1 Préambule : approche simple	79
Construction du problème	80
Application	82
Remarque	83
6.2 Méthode de développement en ondes planes étendue	83
6.2.1 Formulation matricielle	84
6.2.2 Composites bi-périodiques	86
Description des cellules	86
Composites d'épaisseur infinie : propagation quelconque	89
Composites d'épaisseur finie et semi-infinie	92
6.3 Conclusion	106

Partie III Analyse de structures

Introduction	111
Chapitre 7 Composites piézoélectriques	113
7.1 Composites 2-2	113
7.2 Composites 1-3	118
7.2.1 Analyse des couplages inter-éléments	120
Caractéristiques du transducteur	120
Banc de mesures	120
Mesures expérimentales et recalage de constantes	121
Vibrations dans l'air	122
Vibrations en immersion	133
7.2.2 Nature des modes se propageant dans un composite 1-3	137
Evolution des courbes de dispersion en fonction de la composante normale de \mathbf{k}	137
Diagrammes de dispersion <i>hors-plan</i>	140
Modes potentiellement couplés	143
Une utilisation des bandes d'arrêt	149
7.3 Sonde complète 1D	151
7.3.1 Description	151
7.3.2 Comparaison calcul-mesure à différentes phases de fabrication	152
7.3.3 Influence de la colle de remplissage et de la lentille sur la propagation des ondes dans le réseau	154

7.3.4	Fonctions de transfert	154
	en émission	155
	en réception	157
	mode pulse-écho	157
Chapitre 8 Transducteurs micro-usinés sur silicium (MUTs)		159
8.1	Descriptif de la structure	160
8.2	Fonctionnement synchrone	160
8.3	Distribution harmonique des forces d'excitation	163
8.3.1	Description des modes	163
8.3.2	Substrat d'épaisseur finie	166
8.3.3	Couplages inter-éléments	166
8.3.4	Carte complète des modes	170
8.4	Vers d'autres domaines d'applications	171

Partie IV Investigation de nouvelles techniques d'usinage des céramiques piézoélectriques

Introduction		175
Chapitre 9 Micro-sablage		177
9.1	Appareillage	177
9.2	Résultats	178
9.2.1	Premiers essais : masque métallique	178
9.2.2	masque in-situ en PDMS	178
	Usinage à incidence normale	180
	Usinage à incidence oblique	181
Chapitre 10 Usinage abrasif par ultrasons		183
10.1	Principe de l'appareil	183
10.2	Principe physique	184
10.3	Résultats	184
10.3.1	Outils en acier doux	184
10.3.2	Outils alternatifs, quelques pistes	187

Conclusions et perspectives		193
------------------------------------	--	------------

Annexe A Problème fluide/structure : formulation intégrale sur la frontière	197
Annexe B Expression analytique de $I_{(\gamma_1+p, \gamma_2+q)}^{(\mu, \epsilon)}$ pour les éléments de frontière triangulaire	199
Annexe C Réseaux périodiques	201
C.1 Réseaux directs et réseaux réciproques	201
C.2 Zones de Brillouin	201
C.3 Expression des vecteurs d'ondes	203
Annexe D Calcul des constantes du P160	207
<hr/>	
Bibliographie	209

Introduction générale

Depuis sa découverte en 1880 par Jacques et Pierre Curie, la piézoélectricité a trouvé sa place dans de nombreuses applications, telles que l'acousto-électronique, l'acousto-optique, le traitement du signal, l'instrumentation ou encore la métrologie. Sur une idée originale de Chilowsky, un professeur français, Paul Langevin, a développé les premiers prototypes de sonars, motivé d'abord par le drame du Titanic en 1912 puis par le besoin de détecter les sous-marins pendant la Première Guerre Mondiale. L'idée de Chilowsky consistait en l'émission de pression dans un fluide au moyen d'un diaphragme mis en mouvement par un transducteur magnétique. Après avoir essayé des solutions électrostatiques – son fameux "condensateur chantant" – fructueuses mais difficiles à mettre en œuvre, Langevin a finalement utilisé des lames de quartz pour ses premiers prototypes fonctionnels en 1918. Dès 1929, Sokolov développe la première méthode de contrôle non-destructif par ultrasons. Le principe de mesure en mode pulse-écho fut rendu possible au début des années 1940 grâce aux progrès des développements électroniques autour des radars. Immédiatement après la Seconde Guerre Mondiale, la technologie du contrôle non-destructif est appliquée au diagnostic médical, qui devient par la suite l'imagerie acoustique médicale.

Le principe d'émettre des ondes de pression gouverne toujours les sondes ultrasonores pour l'imagerie acoustique (échographie médicale notamment) et le contrôle non-destructif. Du chemin a été parcouru depuis les premières sondes ultrasonores des années 50 jusqu'à aboutir à une utilisation courante de l'imagerie bidimensionnelle. Un des défis pour les années à venir est la conception et la généralisation de sondes d'imagerie tridimensionnelle. Les sondes usuelles pour l'imagerie bidimensionnelle sont désignées couramment sous les termes de sondes 1D ou 1.5D en référence aux réseaux linéaires d'antennes acoustiques élémentaires qui en constituent la pièce maîtresse. L'imagerie tridimensionnelle requiert la conception de sondes dites 2D fondées sur des réseaux bidimensionnels permettant d'orienter et de focaliser le faisceau en tout point de l'espace.

La deuxième préoccupation des concepteurs de sondes d'imagerie se porte sur la qualité de l'image et la sensibilité des sondes, autrement dit la capacité de celles-ci à distinguer les détails les plus infimes. L'obtention d'une image de bonne qualité est intimement liée à la bande de travail de la sonde mais aussi à la maîtrise des vibrations parasites qui sont susceptibles de dégrader la forme du faisceau acoustique et de diminuer la sensibilité de celle-ci.

Les sondes dédiées à l'imagerie médicale ou au contrôle non-destructif sont pour la plupart construites sur la base de structures composites piézoélectriques. Ces structures sont composées de réseaux de barreaux de céramique piézoélectrique – le plus couramment du PZT (titanate zirconate de plomb) – entourés d'une résine. Plus généralement, les sondes modernes d'imagerie sont constituées de réseaux massivement périodiques, par exemple des réseaux linéaires de 192 ou 256 éléments pour les sondes 1D ou des réseaux bipériodiques de 64×64 éléments dans les sondes 2D.

La conception des futures sondes ultrasonores nécessite d'être capable de simuler des structures de plus en plus complexes afin de comprendre et maîtriser les effets de couplage entre éléments (effets de *diaphonie*)

qui y ont lieu. Elle nécessite dans un premier temps d'avoir une compréhension globale du comportement des structures composites, éléments actifs des sondes ultrasonores, puis de pouvoir considérer les sondes dans leur environnement réel de fonctionnement (par exemple en immersion dans l'eau). Ce besoin s'est fait fortement sentir au niveau industriel, notamment chez Parallel Design SAS (anciennement une partie de Thomson Microsonics) et Framatome-ANP qui soutiennent ces travaux de doctorat, et qui développent et fabriquent des sondes d'imagerie médicale pour l'obstétrique (principalement), et de contrôle non-destructif dans les centrales nucléaires, respectivement.

Afin de bien comprendre les concepts en jeu dans les présents travaux, on donne dans la première partie une description des sondes ultrasonores à ondes de volume pour l'imagerie acoustique et le contrôle non-destructif. On décrit les différents composants de telles sondes et on explique les paramètres-clés d'un transducteur, ainsi que les facteurs de qualité d'un tel objet qui concourent à son efficacité. Les images sont obtenues grâce à des sondes multi-éléments, dont les réseaux d'antennes acoustiques réalisent les fonctions nécessaires à la formation du faisceau. Si des effets parasites apparaissent dans le réseau, quelle qu'en soit la cause, le faisceau peut s'en trouver altéré et l'image dégradée, et la sensibilité de la sonde peut en être diminuée. Il est donc nécessaire de définir des grandeurs caractéristiques de tels phénomènes qui tiennent compte des conditions de fonctionnement réelles de la sonde, et qui soient accessibles à la théorie. On généralise le modèle harmonique initialement dédié aux dispositifs à ondes de surface, et de fait particulièrement adapté à la traque d'effets parasites de nature propagative dans le plan du réseau.

La deuxième partie est consacrée à la description des outils de simulation développés pendant ces travaux. Si les modèles unidimensionnels tels que le modèle de Mason ou le modèle KLM sont suffisants pour décrire des structures simples, ils sont inaptes à décrire les sondes modernes de plus en plus complexes. A partir du constat du caractère massivement périodique des sondes modernes et en particulier des composites qui en sont le cœur, on élabore une approche spécifique dans l'optique d'analyser et de décrire clairement le comportement de ces objets. Dans un deuxième temps, cette analyse nous permet de déterminer les grandeurs caractéristiques des effets parasites définies dans la première partie, encore appelés effets de diaphonie, et d'affiner la compréhension de ceux-ci. Parmi toutes les méthodes d'analyse numérique, on retient une méthode de discrétisation spatiale robuste et flexible (méthode des éléments finis) et une méthode de discrétisation spectrale adaptée à l'étude des structures composites (méthode de développement en ondes planes). Le recoupement des résultats obtenus avec les deux méthodes permet de définir la stratégie d'utilisation la plus appropriée pour chacune d'elles.

Afin d'acquérir une certaine confiance dans nos principes de calculs, notamment notre capacité à évaluer les effets de diaphonie, on effectue une série de calculs pour une structure composite présentant une seule direction de périodicité. Sur la base d'un composite bipériodique fourni par Framatome-ANP et d'une sonde commerciale 1D de Parallel Design SAS, on confronte ensuite l'approche périodique aux résultats expérimentaux, tout en menant une étude approfondie du comportement des structures composites. Ces analyses sont l'objet de la troisième partie. Si l'on s'est focalisé sur les structures composites qui constituent l'élément de base des sondes actuelles, ces dix dernières années ont vu émerger la technologie des transducteurs micro-usinés sur silicium, membranes vibrant sur un mode de flexion. En effet, l'histoire nous rattrape en nous offrant ce que Langevin cherchait à obtenir il y a quatre-vingt-dix ans, une solution efficace pour l'excitation capacitive, permise par la miniaturisation et les nouvelles technologies de microfabrication issues

de la micro-électronique. Ce type de transducteurs pourrait être amené, dans les dix ans à venir, à s'imposer comme une alternative pour les sondes ultrasonores, notamment pour des applications endoscopiques. Grâce à nos développements théoriques, nous donnons une analyse du comportement de cette nouvelle catégorie de transducteurs dans leur régime de fonctionnement linéaire.

Les piézocomposites ont cette caractéristique de présenter, comme les cristaux phononiques, une structure de bandes. Autrement dit, il existe une ou des gammes de fréquence pour lesquelles il n'y a pas de résonances, à condition de respecter certains critères de géométrie. A partir des outils de simulation, on espère pouvoir déterminer des structures composites optimales en termes de séparation de la vibration utile (mode de compression dans l'épaisseur) et des vibrations parasites. De façon plus pragmatique, on cherche à élargir le plus possible la bande d'arrêt dans laquelle on place le mode d'épaisseur. Cela peut conduire à des structures complexes inédites et inaccessibles aux techniques de fabrication standards de l'industrie. On présente dans la quatrième et dernière partie deux solutions alternatives à la technique classique de découpe à la scie : le microsablage et l'usinage abrasif par ultrasons en collaboration avec l'EPFL à Lausanne et le LCEP situé à l'ENSM à Besançon, respectivement. Ces deux techniques font l'objet de premières investigations afin de montrer la faisabilité de ces deux approches, l'objectif étant de favoriser des technologies collectives, bas-coûts et industrialisables.

A partir des résultats obtenus tout au long de ces chapitres, on dressera un bilan global pour déterminer l'apport fondamental de ces travaux, issus de l'enrichissement croisé de différents domaines de l'acoustique. On déterminera les actions à entreprendre sur cette base pour concevoir des sondes procurant de meilleures images, avec des structures plus compactes, plus efficaces en émission et plus sensibles en réception.

On se posera aussi la question de la pertinence et de l'utilité de nos outils vis-à-vis d'autres domaines d'applications, qui pourraient bénéficier de l'analyse objective des structures périodiques.

Première partie

Notions générales

Chapitre 1

Ultrasons et piézoélectricité

1.1 Ondes ultrasonores

Le domaine fréquentiel des ultrasons s'étend de la frontière avec l'acoustique audible, fixée arbitrairement à 16 kHz, jusqu'aux fréquences d'agitation thermique des molécules aux environs de 10^{13} Hz. On désigne aussi sous le terme d'*hypersons* les ultrasons dont la fréquence est supérieure à 100 GHz. Seul le mode de production différencie ces deux types d'ondes. Au domaine fréquentiel des ultrasons correspond un domaine de longueurs d'ondes qui s'étend des longueurs d'ondes décimétriques aux longueurs d'ondes nanométriques. Les principales applications des ultrasons sont présentées dans le tableau 1.1 en fonction de la fréquence de ces derniers.

10-50 kHz	Nettoyage, soudage, usinage, collage par ultrasons, émulsification...
10-100 kHz	Acoustique sous-marine, analyse des sous-sols
1-20 MHz	Acoustique médicale, échographie, contrôle non destructif
100 MHz - 10 GHz	Acousto-optique, acousto-électronique
10-1000 GHz	Etude de la matière

TAB. 1.1 – Principales applications des ultrasons en fonction de leur fréquence.

Les deux applications concernées par nos travaux sont l'imagerie médicale, soit le dessin des contours d'un organe ou d'un fœtus (échographie prénatale), et le contrôle non destructif, c'est-à-dire déceler les défauts dans les matériaux. Dans les deux cas, la notion d'impédance acoustique est importante puisque l'écart entre impédances acoustiques de deux milieux conditionne la quantité d'énergie acoustique transmise et réfléchi. Plus l'écart est important, plus l'énergie est réfléchi. L'impédance acoustique joue donc un rôle important dans la capacité à détecter les variations dans un milieu.

Donnons un aperçu de ces deux applications.

Contrôle non destructif (CND) Considérons une pièce d'acier délimitée par deux faces planes parallèles. Une impulsion ultrasonore est émise par un transducteur collé sur la face supérieure de la pièce, puis reçue par le même transducteur après s'être propagée dans le métal et avoir été réfléchi par la face inférieure. Avec une vitesse des ultrasons dans l'acier de l'ordre de 6000 m.s^{-1} , et des faces parallèles distantes de 3 cm, l'écho est reçu au bout de $10 \mu\text{s}$. Une électronique de détection permet de séparer l'impulsion émise de l'écho reçu. Les *mesureurs d'épaisseur* par exemple – appareils servant à déterminer l'épaisseur de pièces dont l'une des faces est inaccessible – détectent les échos provenant de plusieurs allers et retours successifs afin d'améliorer la précision de la mesure. Lorsqu'un défaut – fissure, bulle d'air, hétérogénéité – se situe

sur le trajet de l'impulsion ultrasonore, une partie du signal est réfléchi et l'imperfection est révélée. Dans le cas d'une interface acier-air, 99,99% de l'intensité acoustique est réfléchi, c'est dire la sensibilité de la méthode compte tenu des très grandes variations d'impédance au voisinage d'un défaut tel qu'évoqué plus haut.

Echographie médicale Une des applications des ultrasons dans le domaine médical est l'échographie. Comme l'imagerie sous-marine et le contrôle non destructif, l'échographie médicale ultrasonore repose sur la réflexion des ultrasons à l'interface entre deux milieux d'impédances acoustiques différentes. Dans les tissus humains, la vitesse du son est globalement proche de celle de l'eau : 1550 m.s^{-1} dans le foie, 1560 m.s^{-1} dans les reins, 1590 m.s^{-1} dans les muscles, ou encore 1450 m.s^{-1} dans la graisse. En revanche, elle est comprise entre 3000 et 4000 m.s^{-1} dans les os. Le coefficient de réflexion aux interfaces des différents tissus est beaucoup plus faible qu'en CND. Si une forte amplification des signaux reçus est nécessaire, ce faible facteur de réflexion confère aux tissus une certaine transparence et facilite la pénétration des ultrasons en profondeur. Il rend néanmoins plus délicat la distinction des matières des différents organes observés.

Parmi les méthodes d'imagerie, citons deux approches connues sous le nom d'*échographie en mode A ou B*. Le schéma de principe est reporté sur la figure 1.1.

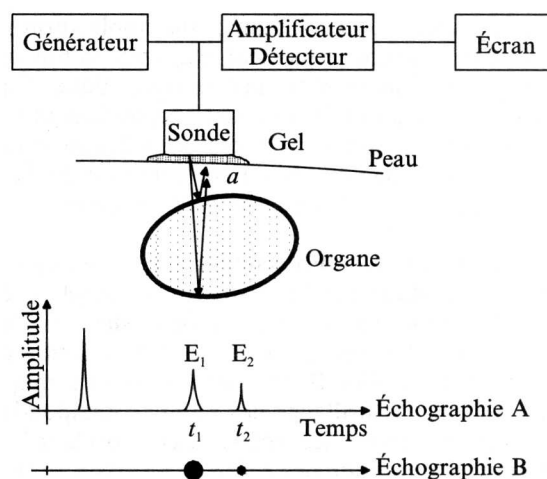


FIG. 1.1 – Schéma de principe de l'échographie par ultrasons en mode A ou B.

Une sonde ultrasonore, posée sur la peau, émet, au travers d'un gel approprié, des impulsions en direction de l'organe examiné. Le gel a une fonction de couplage entre le transducteur et la peau. Il a pour fonction d'éviter la présence d'air et ainsi de faciliter la transmission des ultrasons. Les ondes réfléchies sur la face supérieure de l'organe, puis sur sa face inférieure, sont reçues par la sonde, devenue réceptrice, après des temps t_1 et t_2 . Du temps $t_2 - t_1$ qui s'écoule entre la réception des deux échos, on déduit la distance séparant les deux faces de l'organe. L'échographie A, ancienne, laisse aujourd'hui la place aux images statiques ou dynamiques fournis par l'échographie en mode B. Elle reste cependant utilisée pour des mesures de distance dans certains organes.

En échographie B, les signaux reçus sont utilisés pour moduler la brillance des points correspondant aux temps d'arrivée des échos, en fonction de leurs amplitudes. Pour toute ligne de tir, on matérialise ainsi une suite d'échos d'autant plus brillants que les discontinuités d'impédance qui les ont causés sont fortes. L'ensemble des lignes de tir réalisées au cours du balayage d'un plan de coupe d'un organe donne l'image de ce plan. L'échographie en mode B dynamique, c'est-à-dire de l'imagerie en temps réel, fait appel aux sondes multi-éléments décrites plus loin.

Depuis les travaux pionniers de Langevin [1] pendant la Première Guerre Mondiale, motivés par la détection des sous-marins, la piézoélectricité s'est imposée comme le principe privilégié pour la mise en œuvre des transducteurs ultrasonores. L'effet piézoélectrique est décrit dans la section suivante.

1.2 L'effet piézoélectrique

La piézoélectricité a été découverte par Jacques et Pierre Curie en 1880. La piézoélectricité est la propriété que présentent certains corps de se charger électriquement lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique. Ce comportement, spontané dans le cas de plusieurs cristaux tels que le quartz, est dû à la structure cristalline. Une action mécanique provoque l'apparition d'un dipôle électrique dans chaque maille cristalline du matériau, par déplacement des centres des charges positives et négatives. L'équilibre électrostatique est rompu et une polarisation apparaît à la surface du cristal. C'est l'effet piézoélectrique direct, illustré sur la figure 1.2 dans le cas du quartz.

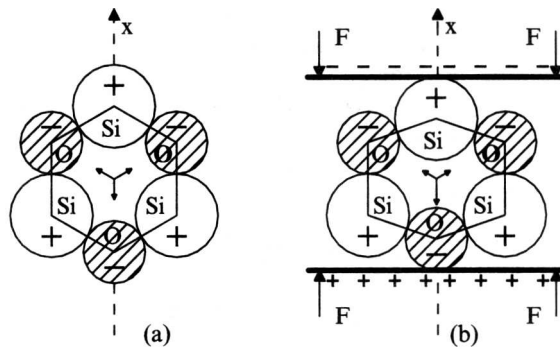


FIG. 1.2 – Effet piézoélectrique direct dans l'exemple du quartz.

Réciproquement, l'application d'un champ électrique provoque une déformation mécanique du matériau. C'est l'effet piézoélectrique inverse. Notons que l'absence de centre de symétrie dans la maille élémentaire est nécessaire à l'apparition de l'effet piézoélectrique.

Les effets piézoélectriques direct et inverse sont illustrés sur la figure 1.3.

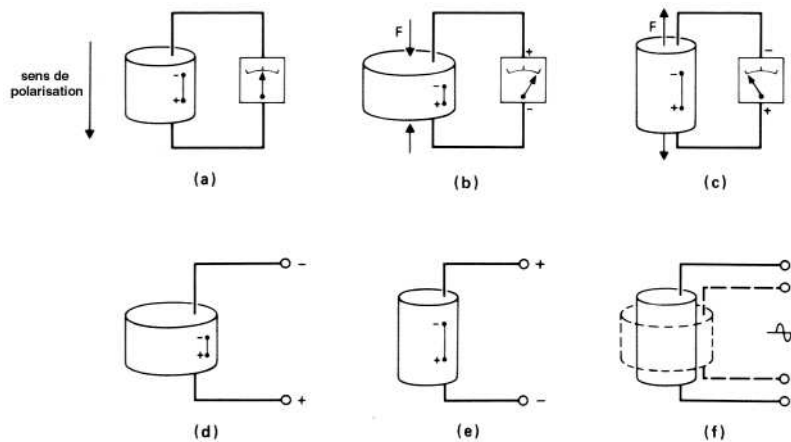


FIG. 1.3 – Effets piézoélectriques direct ((a), (b) et (c)) et inverse ((d), (e) et (f)) pour un cylindre de céramique piézoélectrique polarisé suivant son axe.

Parmi les cristaux piézoélectriques, certains sont ferroélectriques. La polarisation P en fonction d'un champ électrique excitateur E présente un cycle d'hystérésis représenté sur la figure 1.4. On définit une

polarisation rémanente P_r et un champ coercitif E_c .

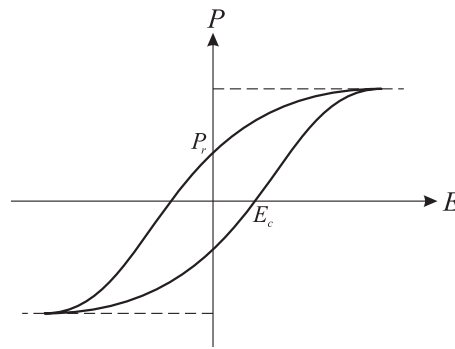


FIG. 1.4 – Cycle d'hystérésis d'un matériau ferroélectrique.

C'est le cas en particulier du titanate de baryum BaTiO_3 et de nombreux sels (titanates, zirconates, stannates) qui ont la structure cristalline de la perovskite (CaTiO_3), représentée sur la figure 1.5.

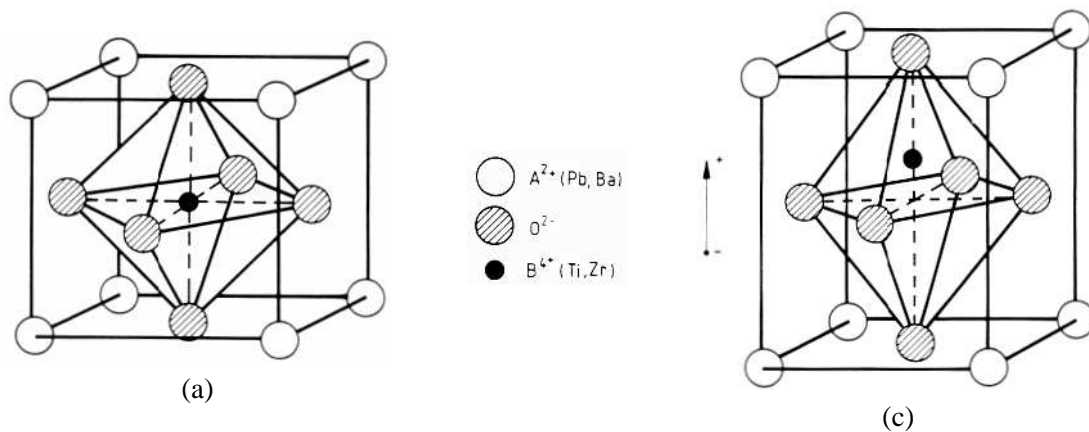


FIG. 1.5 – Maille cristalline de type perovskite du PZT. Réseau (a) cubique (au-dessus de la température de Curie) et (b) tétragonal (sous la température de Curie).

Le cas des céramiques diffère de celui des cristaux piézoélectriques : c'est l'existence de la ferroélectricité qui confère à ces premiers d'excellentes caractéristiques piézoélectriques. Par frittage d'oxydes ou de sels de plomb, de zirconium et de titane, on réalise des composés de formule générale : $\text{PbTi}_{(1-x)}\text{Zr}_x\text{O}_3$ avec x entre 0,2 et 0,6. Dans tous ces composés, les microcristaux élémentaires sont ferroélectriques et donc présentent une polarisation spontanée. Cependant l'aggrégat de ces microcristaux qui constitue la céramique simplement frittée est désordonné et ne présente, à l'échelle macroscopique, aucun moment dipolaire électrique global. La piézoélectricité n'apparaît que si la céramique est soumise à un champ électrique élevé. Celui-ci provoque une polarisation rémanente importante par alignement préférentiel des polarisations des microcristaux élémentaires suivant la direction du champ électrique. Cette étape dite de "polarisation" rend la céramique ferroélectrique et donc piézoélectrique.

Notons cependant que l'orientation des polarisations élémentaires suivant la direction du champ polarisant s'accompagne de contraintes mécaniques dont la libération lente provoque un retour progressif à l'état désordonné. C'est le vieillissement des céramiques.

Enfin, au-dessus d'une température dite de Curie, la maille cristalline perovskite devient cubique comme sur la figure 1.5, et ne présente plus de polarisation. La céramique perd toute propriété piézoélectrique.

Chapitre 2

Sondes ultrasonores à ondes de volume

2.1 Sondes mono-éléments

Le cas le plus simple d'un transducteur à ondes de volume se présente sous la forme d'un disque de matériau piézoélectrique dont les faces sont couvertes par deux électrodes métalliques. Lorsqu'une différence de potentiel est appliquée sur les électrodes, l'épaisseur de la plaque augmente ou diminue en fonction du signe de la tension appliquée. Si on connecte une source de tension alternative, le disque entre en vibration. Lorsque l'épaisseur du disque est moitié de la longueur d'onde, on se trouve à la résonance du mode d'épaisseur avec une amplitude de vibration maximale.

Le transducteur peut aussi convertir l'énergie de vibrations acoustiques en une tension électrique. Il est alors récepteur d'ondes ultrasonores. Quand une onde incidente arrive sur la surface du transducteur, la plaque se met à vibrer et l'effet piézoélectrique crée une tension entre les électrodes.

Après une brève excitation électrique à la fréquence de résonance, le transducteur continue à osciller pendant un certain temps. C'est la *réponse impulsionnelle* du transducteur. La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle donne son spectre fréquentiel, c'est-à-dire sa distribution en fréquences. La largeur de ce spectre est la *bande passante* du transducteur. Plus la bande passante est large, plus la réponse impulsionnelle est amortie rapidement et plus elle est courte dans le temps.

Classiquement, le transducteur est chargé d'un côté par un matériau absorbant, de l'autre par une ou plusieurs lames d'adaptation d'impédance qui s'intercalent entre le transducteur et le milieu de propagation, comme représenté sur la figure 2.1.

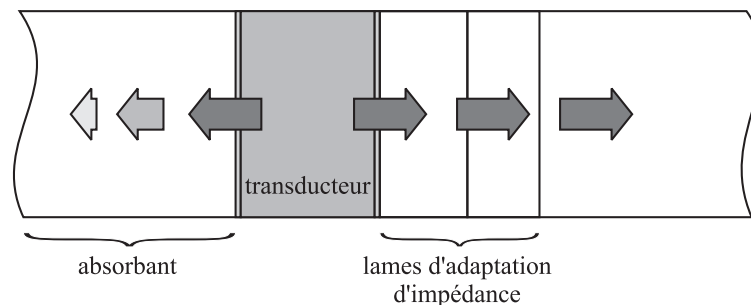


FIG. 2.1 – Structure type d'une sonde mono-élément.

Le matériau absorbant ou *backing* a pour fonction d'empêcher les réflexions en face arrière du transducteur. On suppose le cas idéal d'un transducteur dont la face avant est chargée par un milieu de même impédance acoustique que le transducteur, et excité en mode impulsionnel. Les signaux sont générés dans

les zones des électrodes où l'induction électrique varie rapidement [2]. L'application d'une impulsion électrique produit un allongement (ou un rétrécissement, suivant le sens de la polarisation) de la plaque piézo-électrique avec retour à l'équilibre. Chaque face est source de deux impulsions élastiques de signes opposés se propageant en sens contraires (figure 2.2). La face avant par exemple émet deux ondes de compression en opposition de phase, l'une se propageant vers la droite et l'autre se propageant vers la gauche. Le signal, généré de part et d'autre du transducteur, est constitué de deux signaux de signes opposés. Si la face arrière du transducteur est chargée par un milieu absorbant, les deux ondes se propageant vers la gauche sont absorbées et disparaissent. Le signal se propageant dans le milieu de droite est constitué de deux impulsions. Si, d'autre part, le transducteur n'est pas chargé en face arrière, le signal est constitué de trois impulsions, dont une réfléchie sur la face libre et une autre de hauteur double générée par cette même face. Si donc le transducteur n'est pas chargé par un milieu absorbant, le signal émis dans le milieu de propagation, et qui résulte de la superposition des réponses impulsionnelles décrites précédemment, a une durée plus longue, ce qui induit une bande passante diminuée. L'absorbant est généralement constitué d'un polymère chargé par des inclusions particulières dont le rôle est de diffuser les ondes absorbées. S'il améliore la bande passante du transducteur, il en diminue sa sensibilité, étant donné qu'une partie de l'énergie émise est perdue. Il y a donc un compromis à trouver qui détermine le choix du matériau absorbant.

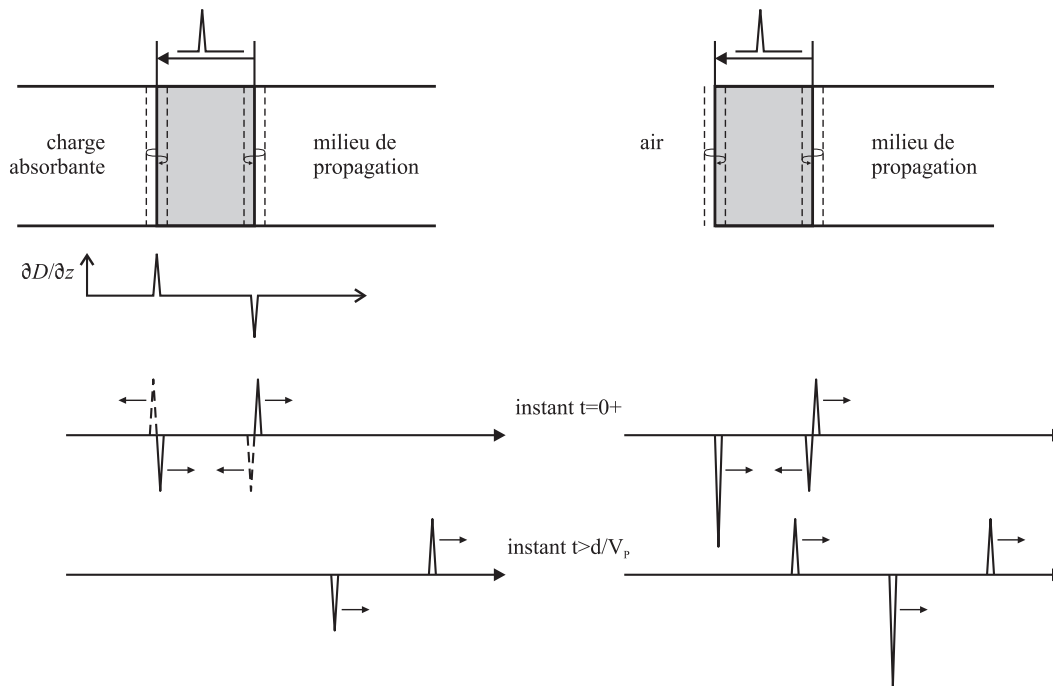


FIG. 2.2 – Réponse impulsionnelle d'un transducteur dont une face est idéalement chargée par un milieu de même impédance acoustique et dont l'autre face est, soit chargée par un milieu absorbant, soit libre.

Les lames d'adaptation d'impédance ont pour rôle de transmettre efficacement les ondes émises dans le milieu de propagation. Une céramique piézoélectrique type PZT a une impédance acoustique de l'ordre de 30 MRayl, tandis que celle de l'eau par exemple est de 1,5 MRayl. Sans lame d'adaptation, peu d'énergie est transmise à l'eau (environ 18%). Ces lames, aussi appelées lames *quart d'onde*, ont théoriquement une épaisseur de $\lambda_l/4$, λ_l étant la longueur d'onde dans chaque lame à la fréquence de fonctionnement du transducteur. Dans le cas d'une seule lame d'adaptation et en régime harmonique, l'impédance acoustique de celle-ci doit satisfaire $Z_l = \sqrt{Z_T Z_L}$ où Z_T est l'impédance du transducteur et Z_L celle du milieu de propagation. Toutefois, l'adaptation d'impédance n'est parfaite qu'à la seule fréquence $f_0 = c_l/4d_l$ où c_l

est la vitesse de propagation dans la lame et d_l son épaisseur [3]. Sur l'ensemble de la bande passante du transducteur, toute l'énergie n'est pas transmise intégralement, et on identifie dans ce phénomène une première source de pertes acoustiques. A partir du modèle KLM exposé dans la section 4.1.2, Desilets *et al.* [4] ont établi, en régime impulsionnel, les impédances acoustiques des lames d'adaptation en fonction de leur nombre. Dans le cas d'une seule lame par exemple, l'impédance de celle-ci doit être fixée à $Z_l = Z_L^{2/3} Z_T^{1/3}$. Ils préconisent de plus l'utilisation d'un absorbant de faible impédance (typiquement de l'ordre de 3 MRayl).

En pratique, dans le cas de l'imagerie médicale, on utilise le plus souvent deux lames d'adaptation afin d'élargir encore la bande passante. L'adaptation d'impédance est réalisée par rapport à l'eau, dont les tissus humains sont majoritairement constitués (60 à 80%). Concernant le contrôle non-destructif, tout dépend de l'épaisseur du gel de couplage qui se trouve entre le transducteur et le milieu contrôlé. Si la longueur d'onde est inférieure à cette épaisseur, l'adaptation d'impédance est faite par rapport au gel ; dans le cas contraire, elle est faite par rapport au milieu contrôlé. Dans ce dernier cas, la lame sert plus de lame de protection de l'élément actif que de lame d'adaptation d'impédance proprement dite.

2.2 Qualité d'une image

De nombreux paramètres jouent sur la qualité d'une image. On en précise ici quelques uns qui permettront de mieux comprendre l'importance de maîtriser les effets de diaphonie dans une sonde ultrasonore multi-éléments

La résolution d'une image par ultrasons est proportionnelle à la longueur d'onde, autrement dit inversement proportionnelle à la fréquence. C'est la *résolution axiale* d'une image. Pour obtenir la meilleure résolution possible, il est nécessaire de travailler à une fréquence aussi haute que possible, comme illustré sur la figure 2.3. D'un autre côté, l'atténuation des ondes ultrasonores augmente aussi avec la fréquence. Un compromis est alors nécessaire en fonction du milieu de propagation et de la profondeur de pénétration désirée.

Plus généralement, la résolution axiale est déterminée par la durée de l'impulsion acoustique émise par la sonde, qui est inversement proportionnelle à la bande passante. La réponse impulsionnelle d'un transducteur comporte, la plupart du temps, plusieurs oscillations liées au retour à l'équilibre de celui-ci. Dans la durée de l'impulsion transmise entrent aussi en jeu le nombre d'impulsions générées par chaque face de la partie active et l'amplitude respective de chacune de celles qui participent à l'impulsion transmise dans le milieu de propagation. La bande passante est donc un critère dominant pour l'obtention d'une résolution axiale satisfaisante.

La *résolution latérale*, quant à elle, est déterminée par la largeur du faisceau acoustique. C'est donc l'ouverture effective de la sonde qui donne la résolution latérale. Elle caractérise la capacité d'une sonde à distinguer deux cibles proches situées à une même distance de la sonde.

Enfin, ajoutons que d'autres phénomènes comme l'existence de lobes secondaires dans le faisceau ultrasonore ou encore les réflexions multiples de l'impulsion acoustique (la *réverbération*) sont sources de bruit et nuisent à la résolution de l'image du point de vue du contraste [5]. Celui-ci peut être notablement amélioré à l'aide de techniques fondées sur le retournement temporel.

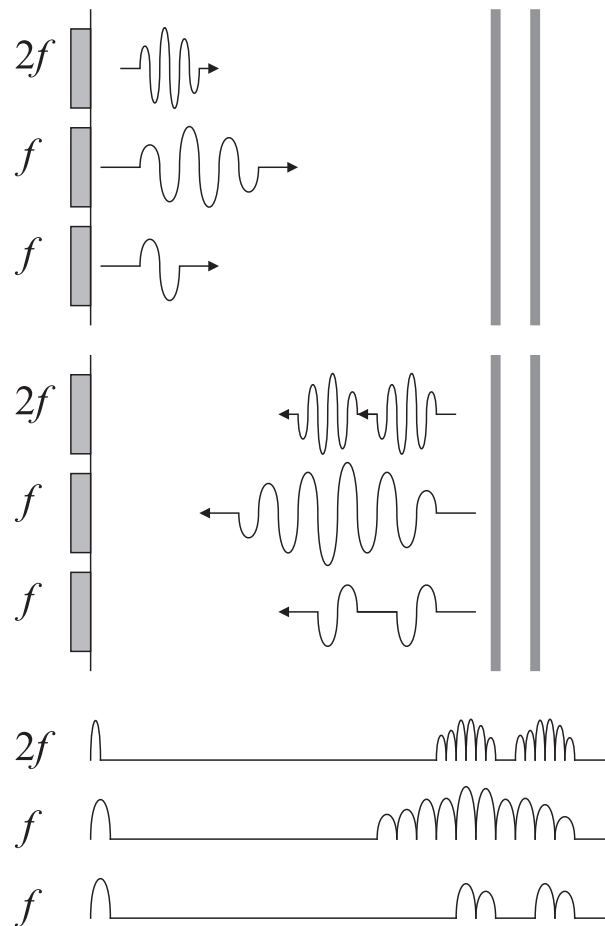


FIG. 2.3 – Illustration de l'influence de la fréquence et de la durée de l'impulsion sur la résolution axiale. Une fréquence plus haute ou une réponse impulsionnelle plus courte (à fréquence égale) permettent de résoudre deux cibles proches.

2.3 Sondes multi-éléments

2.3.1 Description et fonctionnement

Les sondes multi-éléments sont des capteurs constitués d'un grand nombre de transducteurs individuels qui peuvent être pilotés séparément. Ces transducteurs élémentaires peuvent être organisés en réseaux linéaires, annulaires, circulaires ou encore matriciels [6].

Des électroniques adaptées permettent d'émettre et de recevoir en parallèle sur les différentes voies de la sonde. Elles permettent aussi de réaliser des fonctions complexes telles que le balayage, la déflexion (*beam steering* dans la littérature) et la focalisation électronique du faisceau ultrasonore. Ces fonctions sont schématisées sur la figure 2.4.

Le balayage électronique remplace un balayage mécanique dans le sens où il consiste à déplacer le faisceau le long du transducteur en activant séquentiellement plusieurs sous-éléments d'un capteur. Dans ce cas, l'électronique réalise un multiplexage dynamique pour activer successivement les éléments prenant part à l'ouverture active.

La déflexion électronique repose sur l'utilisation de retards électroniques appliqués aux voies du capteur en émission et en réception. La loi de retard définit l'angle d'incidence du faisceau et peut être modifiée dynamiquement pour faire varier l'angle d'incidence. En contrôle non-destructif, la déflexion électronique évite l'utilisation de sabots dont le rôle est de défléchir le faisceau suivant un angle particulier.

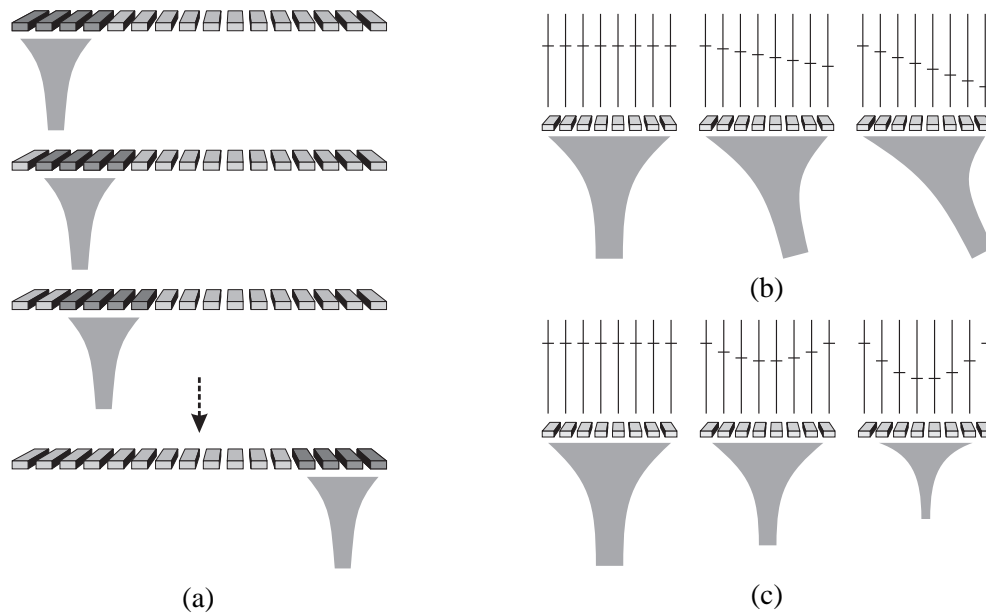


FIG. 2.4 – Représentation schématique des fonctions réalisées par l'électronique des sondes Phased Array : (a) balayage, (b) déflexion et (c) focalisation.

La focalisation électronique, de même que la déflexion, utilise une loi de retard. Elle remplace l'utilisation de lentilles acoustiques et permet de focaliser le faisceau à différentes profondeurs.

Toutes ces fonctions peuvent être utilisées simultanément pour réaliser des fonctions plus complexes. On pense notamment à la possibilité de faire des images en trois dimensions dans les applications d'imagerie médicale (échographie cardiaque, prénatale, etc.).

Différents types de réseaux de transducteurs élémentaires sont représentés sur la figure 2.5.

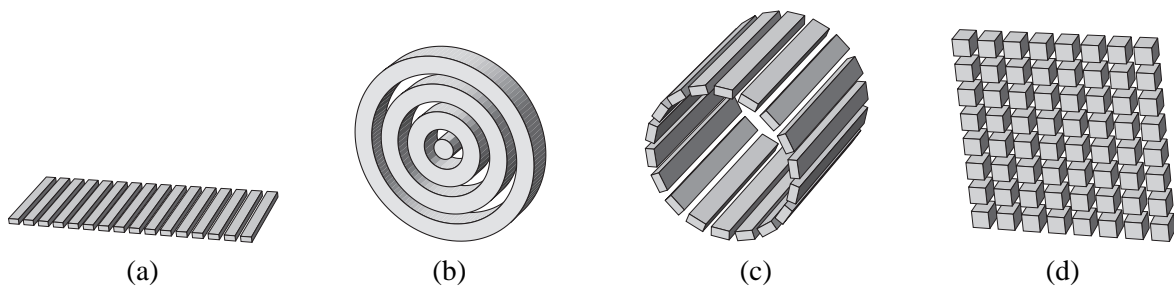


FIG. 2.5 – Différentes géométries de sondes multi-éléments : réseaux (a) linéaire, (b) annulaire, (c) circulaire et (d) matriciel.

Les réseaux linéaires sont constitués d'éléments alignés suivant un même axe et peuvent réaliser les opérations de balayage, déflexion et focalisation dans un plan. Les réseaux annulaires sont un ensemble d'anneaux concentriques permettant de focaliser le faisceau le long d'un axe. Les réseaux circulaires sont constitués d'un ensemble d'éléments répartis sur une couronne, rayonnant soit vers l'intérieur, soit vers l'extérieur. Ils sont par exemple utilisés pour les contrôles de tubes. Enfin les réseaux matriciels résultent d'une division de l'ouverture dans les deux dimensions, par exemple sous forme d'un damier ou d'anneaux sectorisés. Les capteurs à base de réseaux matriciels sont capables de focaliser le faisceau ultrasonore dans l'espace en utilisant simultanément la déflexion et la focalisation. Les figures 2.6(a) et 2.6(b) montrent une sonde linéaire et une sonde convexe utilisant le balayage électronique.

Dans les sondes modernes, on réalise une focalisation électronique à différentes profondeurs (figure 2.7), généralement entre quatre et huit, afin de réaliser une image dite composite [5].

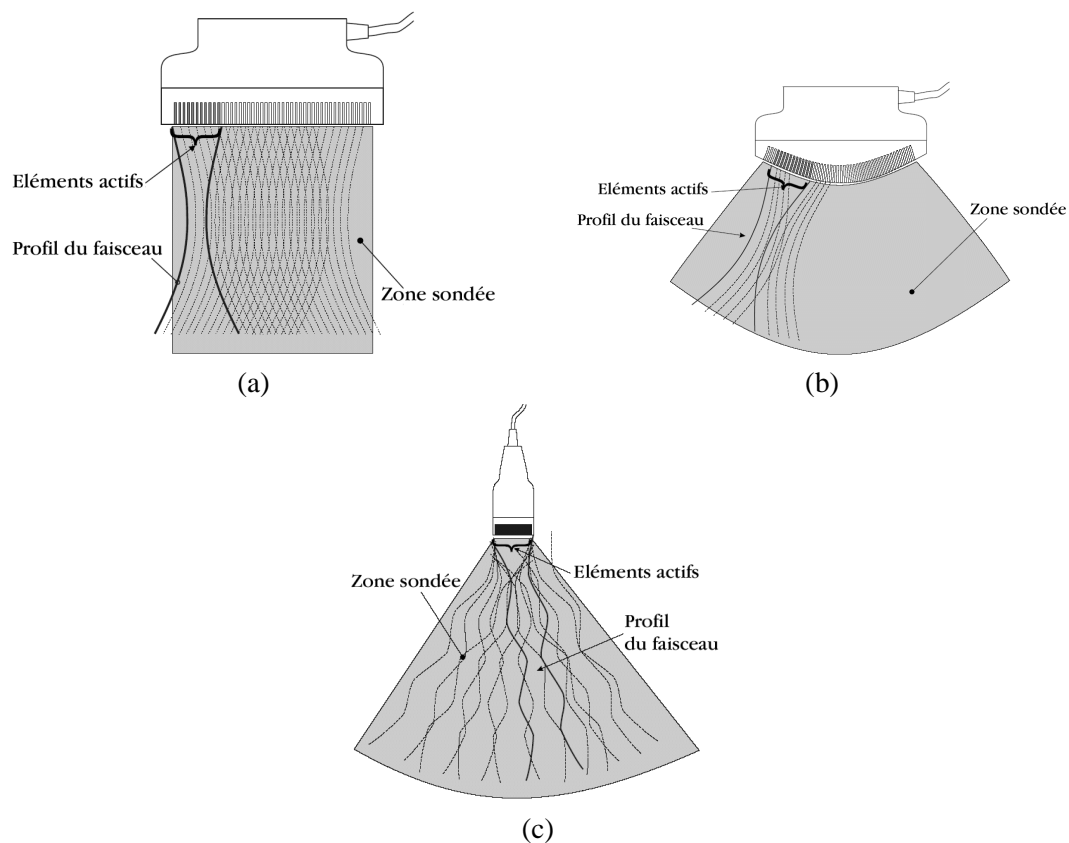


FIG. 2.6 – Différentes sondes à base de (a) réseau linéaire, (b) réseau linéaire convexe et (c) réseau de phases.

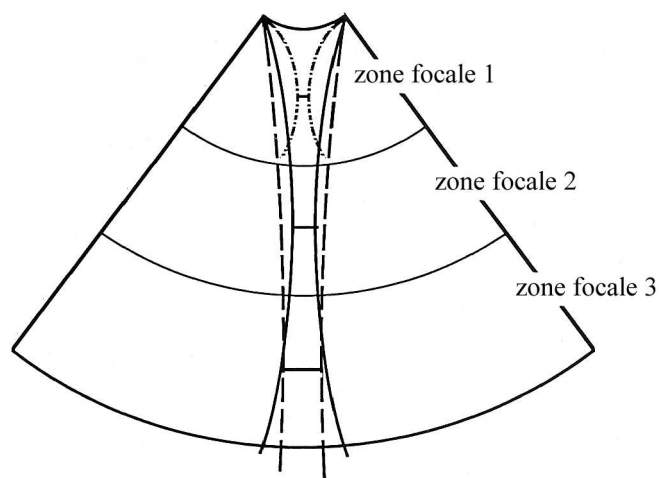


FIG. 2.7 – Principe de l'image composite : l'image est obtenue par trois balayages successifs à différentes profondeurs.

De plus, le diamètre du faisceau ultrasonore est proportionnel au rapport de la distance focale sur l'ouverture du transducteur. Afin de conserver une largeur de faisceau uniforme, le nombre d'éléments utilisés est déterminé en fonction de la profondeur de focalisation. C'est l'*ouverture dynamique* illustrée sur la figure 2.8.

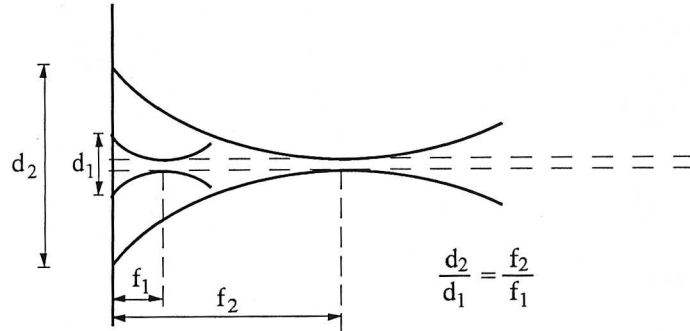


FIG. 2.8 – Principe de l'ouverture dynamique. D'après [5].

La sonde de la figure 2.6(c) est un *réseau de phases* (mieux connu sous l'appellation *phased array* en anglais). Tous les éléments sont utilisés simultanément pendant la transmission et la réception. Ces dernières sondes utilisent simultanément la déflexion et la focalisation électronique.

Dans les réseaux de transducteurs, la forme du faisceau ultrasonore est donc intimement liée à la loi d'excitation (les retards) appliquée sur les transducteurs élémentaires. Afin de ne pas perturber la forme du faisceau, chaque élément doit être piloté indépendamment, idéalement sans générer de vibration sur les éléments voisins, ce qui n'est pas le cas dans la réalité [7]. C'est ce que l'on appelle les effets de *diaphonie* (*cross-talk* dans la littérature anglo-saxonne). Tout l'enjeu consiste donc à minimiser les vibrations induites sur les voisins. Les sondes actuelles sont de plus massivement périodiques avec un grand nombre de transducteurs élémentaires (128 à 256 pour les sondes 1D, jusqu'à 64×64 pour les sondes 2D). Elles nécessitent de nouveaux moyens de modélisation adaptés à leur nature périodique et capables d'en prendre en compte tous les effets.

2.3.2 Ouverture synthétique et directivité

On ne peut parler des sondes ultrasonores pour l'imagerie sans évoquer les notions de champ proche et champ lointain et de forme du faisceau. En acoustique, le terme "ouverture" est utilisé pour se référer à la surface active d'un transducteur simple ou d'un réseau de transducteurs, par analogie à l'ouverture du diaphragme en optique. Le transducteur réalise une fonction de conversion des signaux électriques d'entrée $x_e(t, \mathbf{r})$ en signaux acoustiques $x_m(t, \mathbf{r})$, via une fonction de transfert (réponse impulsionnelle du transducteur) $\alpha(t, \mathbf{r})$ comme représenté sur la figure 2.9, et réciproquement.

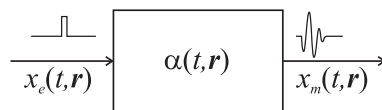


FIG. 2.9 – Représentation schématique de la conversion des signaux électriques x_e en signaux acoustiques x_m via une fonction de transfert.

Les signaux acoustiques de sortie du transducteur, par extension d'entrée du milieu de propagation, s'écrivent comme le produit de convolution, par rapport au temps, de l'excitation et de la fonction de trans-

fert :

$$x_m(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(\tau, \mathbf{r}) \alpha(t - \tau, \mathbf{r}) d\tau, \quad (2.1)$$

i.e. :

$$x_m(t, \mathbf{r}) = x_e(t, \mathbf{r}) * \alpha(t, \mathbf{r}). \quad (2.2)$$

$x_m(t, \mathbf{r})$ est la distribution de sources le long de l'ouverture acoustique.

Par transformée de Fourier, le produit de convolution devient :

$$X_m(f, \mathbf{r}) = X_e(f, \mathbf{r}) A(f, \mathbf{r}) \quad (2.3)$$

et les signaux en entrée du milieu de propagation deviennent :

$$x_m(t, \mathbf{r}) = \text{T.F.}^{-1} [X_m(f, \mathbf{r})] = \int_{-\infty}^{+\infty} X_e(f, \mathbf{r}) A(f, \mathbf{r}) \exp(j2\pi ft) df. \quad (2.4)$$

où $A(f, \mathbf{r})$ est aussi appelée fonction d'ouverture synthétique [8].

Comme on le voit dans la section 5.4, le champ de pression (ou de vitesse) dans le milieu de propagation s'écrit comme le produit de convolution, par rapport à l'espace, des signaux acoustiques x_m en sortie du transducteur (vitesses à la surface) et de la fonction de Green du milieu de propagation. Pour fixer les idées, on s'intéresse au cas où le milieu de propagation est un fluide idéal. L'approximation de la fonction de Green amène à définir les notions de champ proche (approximation de Fresnel) et de champ lointain (approximation de Fraunhofer) [8]. On ne donne pas ici l'expression de la fonction de Green dans les deux cas, mais on rapporte les principaux résultats.

Typiquement, l'approximation de Fresnel est valide si :

$$r > 1,356 R, \quad (2.5)$$

où r représente globalement la distance du transducteur à un point du fluide, et R le plus grand "rayon" de l'ouverture.

Considérant le développement de Fresnel de la fonction de Green, une approximation supplémentaire (approximation de Fraunhofer) conduit à définir le critère de champ lointain :

$$r > \pi R^2 / \lambda, \quad (2.6)$$

duquel découle le critère de champ proche (dans l'approximation de Fresnel) :

$$\pi R^2 / \lambda > r > 1,356 R, \quad (2.7)$$

où λ est la longueur d'onde acoustique dans le fluide.

On est alors amené à définir les fonctions de directivité respectivement en champs proche et lointain, dont on ne donne ici que les expressions finales. Les fonctions de directivité sont similaires, en optique, aux figures de diffraction obtenues par transformée de Fourier (ou de Fresnel en champ proche) de la transparence.

La fonction de directivité en champ proche de la fonction d'ouverture synthétique $A(f, \mathbf{r}_0)$ est donnée

par :

$$D(f, r, k \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f, \mathbf{r}_0) \exp \left(-jk \frac{r_0^2}{2r} \right) \exp \left(jk \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}|} \right) d\mathbf{r}_0, \quad (2.8)$$

où \mathbf{r}_0 est la position d'un point source sur le transducteur et k est le nombre d'onde (en radians par mètre) dans le fluide. Rappelons que $A(f, \mathbf{r}_0)$ est la réponse fréquentielle complexe à la position \mathbf{r}_0 de l'ouverture complexe.

De même la fonction de directivité en champ lointain s'écrit :

$$D(f, k \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f, \mathbf{r}_0) \exp \left(jk \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}|} \right) d\mathbf{r}_0. \quad (2.9)$$

Remarquons que cette dernière ne dépend plus de la distance r de l'ouverture à un point du fluide.

Dans le cas général, on peut exprimer la fonction d'ouverture complexe $A(f, \mathbf{r}_0)$ par :

$$A(f, \mathbf{r}_0) = a(f, \mathbf{r}_0) \exp(j\theta(f, \mathbf{r}_0)). \quad (2.10)$$

Prenons le cas d'une ouverture linéaire le long de l'axe x et écrivons la phase comme un développement polynomial :

$$\theta(f, x_0) = \theta_0(f) + \theta_1(f) x_0 + \theta_2(f) x_0^2 + \dots + \theta_n(f) x_0^n. \quad (2.11)$$

Alors $\theta_0(f)$ représente une phase constante (indépendante de la position x_0 du point source), $\theta_1(f) x_0$ est une variation linéaire de la phase qui a pour effet la déflexion du faisceau, et $\theta_2(f) x_0^2$ est une variation quadratique de la phase le long de l'ouverture responsable de la focalisation dans la zone de Fresnel. On montre [8] que la forme du faisceau en champ lointain peut être obtenue en champ proche (dans l'approximation de Fresnel) à la distance $r = r'$ si on réalise une focalisation telle que $\theta_2(f) = k/2r'$ ($k = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda$).

Enfin, si on considère un réseau linéaire d'ouvertures, on montre que la fonction de directivité en champ lointain est périodique avec la potentialité d'obtenir des lobes secondaires dans le demi-espace fluide où le réseau rayonne. Afin d'éviter ces lobes secondaires, il faut correctement choisir la période d du réseau telle que [8] :

$$d < \lambda_{\min}/2. \quad (2.12)$$

λ_{\min} est la longueur d'onde minimum associée à la fréquence maximum $f_{\max} = c/\lambda_{\min}$ donnée par la largeur de bande de la sonde, qui doit être capable de fonctionner sur une large bande de fréquences.

Ces quelques considérations fixent les dimensions limites d'une sonde multi-éléments (son ouverture et la taille de ses éléments) pour, d'une part, que les ondes émises par chaque voie interfèrent de sorte que le faisceau résultant soit correct, et d'autre part éviter l'apparition de lobes secondaires.

En pratique, les effets de diaphonie vont contribuer pour partie à la fonction d'ouverture synthétique puisqu'ils participent à la réponse intrinsèque du réseau de transducteurs. Ils peuvent modifier plus ou moins fortement la fonction de directivité, autrement dit altérer la forme du faisceau. Savoir estimer les effets de diaphonie en terme de contributions à la fonction d'ouverture, c'est donc avoir accès à la forme réelle du faisceau d'une sonde ultrasonore.

2.4 La technologie des composites piézoélectriques ou *piézocomposites*

Un composite piézoélectrique, encore appelé piézocomposite par abus de langage, est la combinaison d'une céramique piézoélectrique et d'un polymère non piézoélectrique. Le fait d'associer plusieurs constituants, appelés phases, permet de combiner leurs propriétés physiques.

Le concept de piézocomposite a vu le jour dans les années 70 peu après l'apparition du titanate de baryum comme céramique piézoélectrique, lorsque des chercheurs du Naval Research Laboratory ont voulu intégrer le titanate de baryum dans une matrice de polymère afin d'obtenir un hydrophone flexible. D'autres tentatives ont consisté à combiner des poudres de PZT avec un polymère, toujours afin d'obtenir des matériaux piézoélectriques flexibles. Les premières communications montrant le potentiel de ces matériaux pour les applications sous-marines ont déclenché l'attrait des chercheurs pour les composites piézoélectriques, notamment à Pennsylvania State University.

Si les composites piézoélectriques ont pris de multiples formes [9, 10], les composites dits de connectivité 1-3, barreaux de PZT dans une matrice de polymère, ont le plus retenu l'attention [11].

2.4.1 Classification

Les composites ont été classés par Newnham [12] suivant la connectivité de chacune de leurs phases et on caractérise ainsi leur structure tridimensionnelle. On désigne un composite constitué de deux phases par deux entiers "i-j" qui précisent le nombre de directions suivant lesquelles chaque phase établit une liaison ou connectivité. Différentes combinaisons sont décrites sur la figure 2.10.

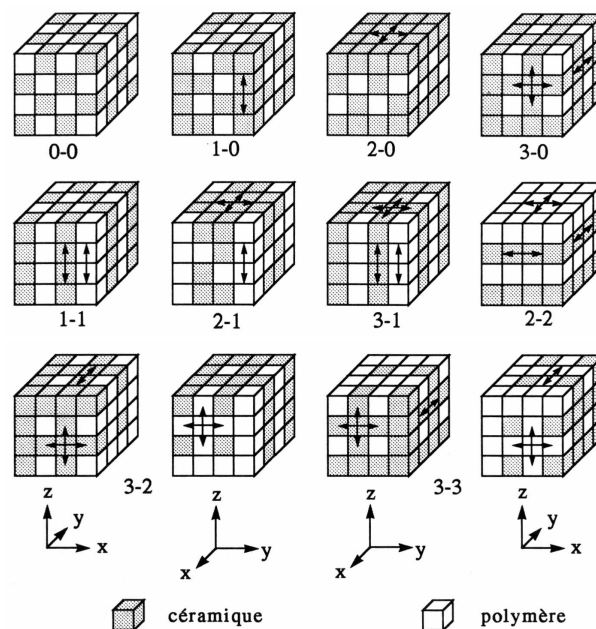


FIG. 2.10 – Schémas de connectivité pour un composite à deux phases.

Dans le cas d'un composite piézoélectrique la résine confère flexibilité et impédance acoustique faible à une céramique rigide fortement couplée de type PZT. Les combinaisons utilisées pour les transducteurs ultrasonores sont des composites 2-2 à une périodicité et 1-3 à deux périodicités. La figure 2.11a montre un composite piézoélectrique de connectivité 1-3.

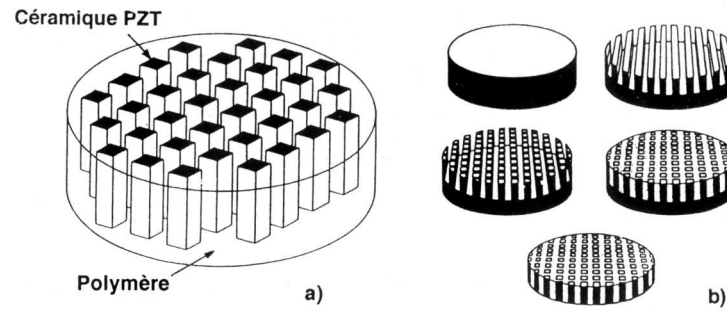


FIG. 2.11 – Schéma d'un composite de connectivité 1-3 (a), et fabrication par la méthode de découpe et imprégnation (b).

2.4.2 Fabrication

Les premiers piézocomposites 1-3 ont été fabriqués en formant de longs bâtonnets cylindriques en PZT, en les alignant parallèlement les uns aux autres à l'aide d'un support et en les entourant d'un polymère. Ne restait plus ensuite qu'à découper des disques perpendiculairement à l'axe des bâtonnets [13]. Avec cette méthode, le diamètre des bâtonnets était de deux cents microns au minimum.

D'autres procédés de fabrication sont apparus par la suite, permettant de diminuer la taille des bâtonnets (moins de 50 microns de large). Citons le procédé de fabrication par réplique [14] de fibres de carbone préformées, la technique de fabrication à moule perdu, que le moule soit en plastique [15] ou en silicium usiné par DRIE (deep reactive ion etching) [16], la découpe par faisceau laser [17, 18] ou encore la microstéréolithographie [19].

Cependant, le procédé de fabrication le plus répandu dans l'industrie est la technique dite de "découpe et imprégnation", connue en anglais sous l'appellation "dice-and-fill technique". Cette méthode a été proposée par Savakus [20] et a permis l'industrialisation de la technologie composite 1-3. Les différentes étapes de fabrication sont reportées sur la figure 2.11b. Des rainures sont usinées dans une plaque massive de céramique piézoélectrique préalablement polarisée à l'aide d'une scie diamantée. Une deuxième série de découpes est effectuée dans la direction orthogonale afin d'obtenir les plots de section carrée. On réalise ensuite l'imprégnation des rainures par un polymère. Enfin, après polymérisation la plaque est rectifiée afin d'éliminer l'épaisseur de céramique non découpée et de maîtriser précisément l'épaisseur du composite en fonction de la fréquence de fonctionnement désirée. A cause de la fragilité des barreaux, il est très difficile de descendre en-dessous d'une largeur de cinquante microns avec cette technique, même si on se départit de certains des problèmes de fragilité en imprégnant la céramique après la première découpe, ce qui implique que la deuxième découpe se fasse dans un composite céramique/polymère.

Le point crucial, et la cause du succès de la technique "dice and fill", est une industrialisation aisée. C'est pourquoi il semble plus intéressant d'envisager l'utilisation de technologies collectives moins coûteuses, permettant d'atteindre des résolutions spatiales plus élevées afin d'augmenter la fréquence de fonctionnement, et permettant en prime de ne plus être contraint au seul réseau carré. Des pistes sont données dans la partie IV.

2.4.3 Propriétés pour le mode d'épaisseur

Le mode utile pour les transducteurs ultrasonores dédiés à l'imagerie est le mode d'épaisseur (mode "piston"), soit le mode de compression fondamental le long de l'épaisseur. Un modèle de vibration unidimensionnelle décrit les caractéristiques de vibration du mode d'épaisseur en première approximation. Ce

modèle a été développé par W.A. Smith et B.A. Auld [21]. Les composites peuvent alors être considérés, pour le seul mode d'épaisseur, comme un milieu homogène avec de nouvelles constantes effectives. Toutefois, cela n'est vrai qu'à la condition que le mode d'épaisseur soit correctement découplé de tout autre mode, notamment les modes latéraux que nous abordons plus loin. D'autre part, ce modèle ne tient pas compte de l'influence du caractère périodique du composite sur les modes qui se propagent dans la structure.

On présente ici succinctement les résultats de ce modèle. On oriente le plan du composite suivant le plan (x_1, x_2) . La phase polymère est un milieu homogène isotrope non piézoélectrique, ainsi (avec la notation contractée) :

$$T_1 = c_{11}S_1 + c_{12}S_2 + c_{12}S_3 \quad (2.13)$$

$$T_2 = c_{12}S_1 + c_{11}S_2 + c_{12}S_3 \quad (2.14)$$

$$T_3 = c_{12}S_1 + c_{12}S_2 + c_{11}S_3 \quad (2.15)$$

$$T_4 = c_{44}S_4 \quad (2.16)$$

$$T_5 = c_{44}S_5 \quad (2.17)$$

$$T_6 = c_{44}S_6 \quad (2.18)$$

$$D_1 = \epsilon_{11}E_1 \quad (2.19)$$

$$D_2 = \epsilon_{11}E_2 \quad (2.20)$$

$$D_3 = \epsilon_{11}E_3 \quad (2.21)$$

La céramique piézoélectrique est polarisée suivant la normale au plan de la structure :

$$T_1 = c_{11}^E S_1 + c_{12}^E S_2 + c_{13}^E S_3 - e_{31}E_3 \quad (2.22)$$

$$T_2 = c_{12}^E S_1 + c_{11}^E S_2 + c_{13}^E S_3 - e_{31}E_3 \quad (2.23)$$

$$T_3 = c_{13}^E S_1 + c_{13}^E S_2 + c_{33}^E S_3 - e_{33}E_3 \quad (2.24)$$

$$T_4 = c_{44}^E S_4 - e_{15}E_2 \quad (2.25)$$

$$T_5 = c_{44}^E S_5 - e_{15}E_1 \quad (2.26)$$

$$T_6 = c_{66}^E S_6 \quad (2.27)$$

$$D_1 = e_{15}S_5 + \epsilon_{11}^S E_1 \quad (2.28)$$

$$D_2 = e_{15}S_4 + \epsilon_{11}^S E_2 \quad (2.29)$$

$$D_3 = e_{31}S_1 + e_{31}S_2 + e_{33}S_3 + \epsilon_{33}E_3 \quad (2.30)$$

On distingue les coefficients élastiques et diélectriques de la céramique, par rapport à ceux de la résine, par les indices E et S .

Après introduction de six approximations simplificatrices [21], on obtient les équations constitutives effectives du composite :

$$\overline{T}_3 = \overline{c}_{33}^E \overline{S}_3 - \overline{e}_{33} \overline{E}_3 \quad (2.31)$$

$$\overline{D}_3 = \overline{e}_{33} \overline{S}_3 + \overline{\epsilon}_{33}^S \overline{E}_3 \quad (2.32)$$

où :

$$\bar{c}_{33}^E = v \left[c_{33}^E - \frac{2\tilde{v}(c_{13}^E - c_{12})^2}{v(c_{11} + c_{12}) + \tilde{v}(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] + \tilde{v} c_{11} \quad (2.33)$$

$$\bar{e}_{33} = v \left[e_{33} - \frac{2\tilde{v}e_{31}(c_{13}^E - c_{12})}{v(c_{11} + c_{12}) + \tilde{v}(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] \quad (2.34)$$

$$\bar{\epsilon}_{33}^S = v \left[\epsilon_{33}^S + \frac{2\tilde{v}(e_{31})^2}{v(c_{11} + c_{12}) + \tilde{v}(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] + \tilde{v} \epsilon_{11} \quad (2.35)$$

avec v fraction volumique de la céramique dans le composite et $\tilde{v} = (1 - v)$.

Si on choisit \bar{S}_3 et \bar{D}_3 comme variables indépendantes les équations constitutives effectives deviennent :

$$\bar{T}_3 = \bar{c}_{33}^D \bar{S}_3 - \bar{h}_{33} \bar{D}_3 \quad (2.36)$$

$$\bar{E}_3 = \bar{h}_{33} \bar{S}_3 + \bar{\beta}_{33}^S \bar{D}_3 \quad (2.37)$$

avec :

$$\bar{c}_{33}^D = \bar{c}_{33}^E + (\bar{e}_{33})^2 / \bar{\epsilon}_{33}^S \quad (2.38)$$

$$\bar{h}_{33} = \bar{e}_{33} / \bar{\epsilon}_{33}^S \quad (2.39)$$

$$\bar{\beta}_{33}^S = 1 / \bar{\epsilon}_{33}^S \quad (2.40)$$

auxquelles il faut adjoindre la densité effective du composite :

$$\bar{\rho} = v \rho^{\text{céramique}} + \tilde{v} \rho^{\text{polymère}} \quad (2.41)$$

On peut dès lors écrire les paramètres qui nous intéressent pour un transducteur ultrasonore, à savoir le facteur de couplage électromécanique,

$$\bar{k}_t = \bar{h}_{33} / (\bar{c}_{33}^D \bar{\beta}_{33}^S)^{1/2} = \bar{e}_{33} / (\bar{c}_{33}^D \bar{\epsilon}_{33}^S)^{1/2} \quad (2.42)$$

l'impédance acoustique,

$$\bar{Z} = (\bar{c}_{33}^D \bar{\rho})^{1/2} \quad (2.43)$$

et la vitesse longitudinale,

$$\bar{v}_l = (\bar{c}_{33}^D / \bar{\rho})^{1/2} \quad (2.44)$$

La figure 2.12 montre la variation des constantes effectives d'un composite en fonction de la fraction volumique de céramique. Celles-ci varient essentiellement linéairement avec la fraction volumique. La figure 2.13 illustre le comportement des paramètres du transducteur, à savoir l'impédance acoustique, la vitesse longitudinale de l'onde de compression et le facteur de couplage électromécanique du mode d'épaisseur. L'impédance acoustique augmente quasi-linéairement avec la fraction volumique, sauf pour de grandes fractions volumiques où elle augmente plus vite. La variation de la vitesse longitudinale est liée à la rigidification des barreaux de PZT par les forces latérales exercées par le polymère, et à la variation de la densité moyenne du composite. Enfin, pour des fractions volumiques intermédiaires, la constante de couplage électromécanique est proche du k_{33} des barreaux de céramique libres, quoiqu'un peu en retrait. Pour les très grandes fractions volumiques, elle diminue rapidement jusqu'à atteindre la valeur pour un disque de céramique, k_t .

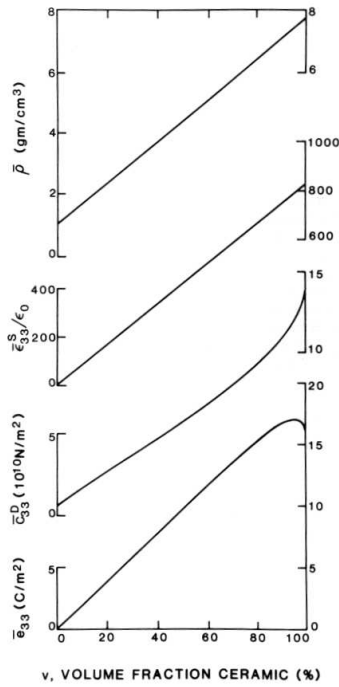


FIG. 2.12 – Variation des caractéristiques matériaux du composite en fonction de la fraction volumique v : densité, $\bar{\rho}$; constante diélectrique, $\bar{\epsilon}_{33}^S$; constante élastique, \bar{c}_{33}^D ; et constante piézoélectrique, \bar{e}_{33} . Les constantes matériaux utilisées sont celles du PZT5 et de l'epoxy Spurr. D'après [21].

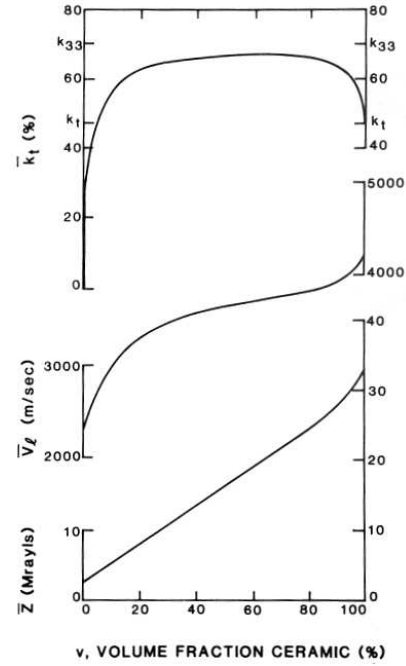


FIG. 2.13 – Variation des paramètres du transducteur composite en fonction de la fraction volumique v : impédance acoustique, \bar{Z} ; vitesse longitudinale, \bar{v}_l ; et constante de couplage électromécanique, \bar{k}_t . Les constantes matériaux utilisées sont celles du PZT5 et de l'epoxy Spurr. D'après [21].

Il est donc possible de concevoir un transducteur composite à haut couplage électromécanique et à faible impédance acoustique en faisant varier la fraction volumique de PZT, et en effectuant un compromis entre ces deux quantités. Le bénéfice principal de la réduction de l'impédance acoustique est la possibilité de réaliser une très bonne adaptation d'impédance avec une unique lame, dont les tolérances de fabrication tant en terme d'impédance que d'épaisseur sont moins strictes. L'avantage ici revêtirait plus un aspect financier puisque cela permet de baisser les coûts de production [22]. En pratique, deux lames d'adaptation sont utilisées afin d'obtenir une largeur de bande supérieure à 80 %. Ce modèle fournit un premier ensemble de paramètres pour concevoir les sondes suivant les applications.

2.4.4 Avantages technologiques

Au-delà de l'amélioration des propriétés effectives du matériau, les piézocomposites offrent d'autres avantages.

Ils présentent une certaine flexibilité grâce aux propriétés mécaniques du polymère, et peuvent être mis en forme à des fins de focalisation du faisceau acoustique. On n'a alors plus recours à une lentille acoustique qui atténue et déforme le faisceau. Dans la sonde convexe de la figure 2.6b [5], le réseau de transducteurs est courbé dans la longueur afin de permettre l'illumination du secteur et dans la largeur afin de focaliser le faisceau dans le plan du balayage.

Comparé à une céramique monolithique, le composite présente l'avantage de limiter la propagation transversale du mode d'épaisseur grâce à la séparation des barreaux par le polymère. Autrement dit, les vibrations parasites engendrées sont réduites et le couplage inter-éléments l'est aussi comme le montre la fi-

gure 2.14. Il n'est alors pas nécessaire de découpler acoustiquement les éléments du réseau en les découpant. Les transducteurs élémentaires sont alors définis par les seules électrodes.

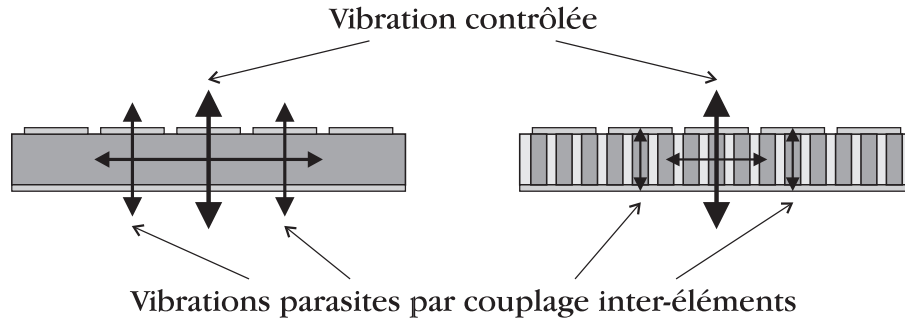


FIG. 2.14 – Diminution du couplage inter-éléments dans un composite comparé à une céramique monolithique.

Pour profiter de ce dernier avantage et pouvoir considérer le composite comme un matériau homogène pour le mode d'épaisseur, il est nécessaire de bien prêter attention aux dimensions latérales. La largeur des barreaux et l'espace inter-éléments doivent être inférieurs aux longueurs d'ondes acoustiques utiles. Pour les transducteurs dédiés à l'imagerie, ces longueurs d'ondes sont celles associées à la bande passante du transducteur telles que la longueur d'onde minimum soit $\lambda_{min} = V_{\phi}^{eau} / f_{max}$.

Malgré tout, d'autres phénomènes interviennent dans les structures composites. D'une part, la continuité de la couche composite non-découpée est propice à la propagation de modes de Lamb [3] le long de la structure. D'autre part, le réseau périodique et ses discontinuités sont à l'origine d'autres modes appelés modes latéraux.

2.4.5 Modes latéraux

Lorsque les dimensions latérales du réseau (largeur des barreaux, espace inter-éléments) ne sont plus sub-longueurs d'ondes apparaissent des phénomènes assimilables à de la diffraction de Bragg. Les modes qui en résultent sont appelés modes latéraux. Auld *et al.* [23] ont identifié les deux premiers modes latéraux. Les modes latéraux sont dus à la diffraction de Bragg d'ondes polarisées suivant l'axe des barreaux (ondes transverses verticales). Les ondes transverses se réfléchissent sur les plans verticaux formés par les interfaces céramique/polymère et les modes latéraux apparaissent lorsque les réflexions multiples interfèrent constructivement, soit en considérant l'alignement des plots suivant leur largeur (figure 2.15a), soit suivant la diagonale (figure 2.15b).

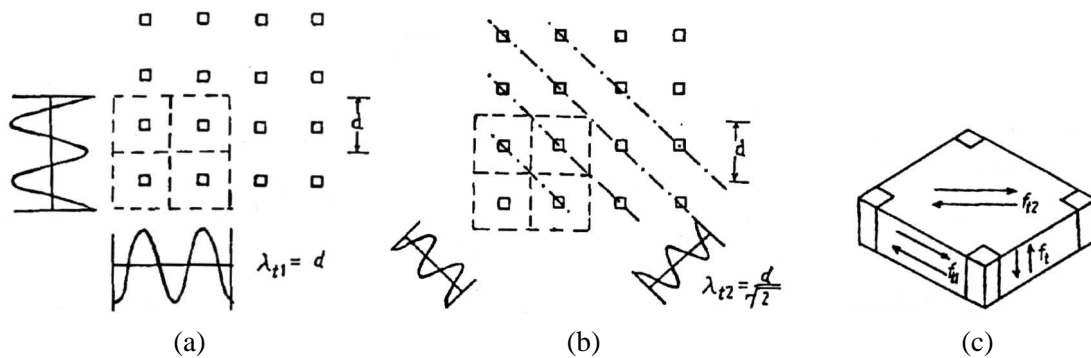


FIG. 2.15 – Premiers modes latéraux dus à la diffraction de Bragg dans le réseau. Les vibrations se font suivant l'axe des barreaux (ondes transverses verticales). D'après [24].

Lorsque la fréquence de travail augmente, la présence de ces modes latéraux est critique puisqu'ils sont susceptibles de se coupler au mode d'épaisseur dont ils altèrent la vibration. Pour les sondes large-bande, l'idéal est de repousser ces modes vers de plus hautes fréquences, au minimum à deux fois la fréquence du mode d'épaisseur, afin que le composite se comporte comme un matériau homogène dans la bande de fréquences utiles.

Hladky-Hennion *et al.* ont proposé une méthode numérique de simulation, sur la base des éléments finis, pour analyser les structures périodiques [25, 26] et en particulier les composites 1-3 [27]. Plus récemment, Certon *et al.* [28, 29] ont proposé deux approches différentes (théorie des ondes de Bloch, méthode des différences finies) pour prévoir la fréquence et le champ de déplacements des premiers modes latéraux dans des composites 1-3, dont l'épaisseur est considérée infinie. Notons que cette dernière hypothèse exclut la prise en compte de l'épaisseur dans l'estimation de la fréquence des modes latéraux.

Parallèlement ils ont caractérisé expérimentalement ces mêmes modes par détection laser interférométrique [30]. Le profil expérimental des deux premiers modes latéraux est reporté sur la figure 2.16. Pour le premier mode latéral, la résine située aux coins entre quatre barreaux vibre avec une amplitude beaucoup plus importante que les barreaux de céramique. De plus la matrice de résine et les barreaux vibrent en opposition de phase. Le second mode latéral se caractérise par une grande vibration de la résine entre deux barreaux de PZT, en opposition de phase par rapport au reste de la résine et à la céramique.

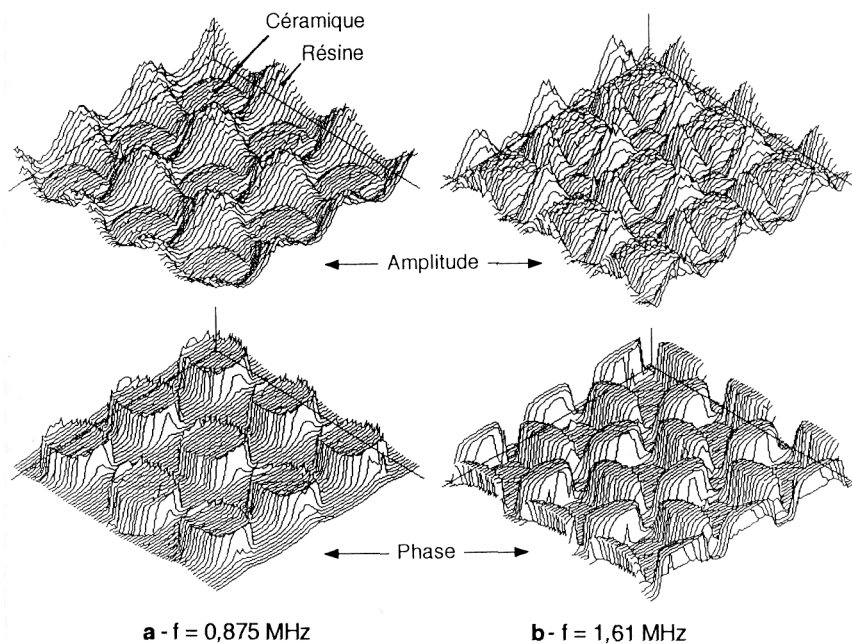


FIG. 2.16 – Profils en amplitude et phase du déplacement normal, à la surface d'un piézocomposite 1-3, à la fréquence du premier (a) et du second (b) mode latéral. D'après [29].

Enfin, Langlet *et al.* [31, 32] ont déterminé les modes propres des composites 1-3 par une méthode d'éléments finis associée à la théorie de Bloch-Floquet [33].

Un autre aspect associé à la diffraction de Bragg dans les structures périodiques est la notion de bandes d'arrêt. La figure 2.17a représente les courbes de dispersion d'une plaque homogène, ici typiquement les trois premiers modes de Lamb, tandis que la figure 2.17b montre les modifications apportées par le caractère périodique d'une plaque de période d . Les traits verticaux en pointillés indiquent les longueurs d'ondes pour lesquelles la diffraction intervient et pour lesquelles apparaissent les bandes d'arrêt. Les vecteurs d'ondes correspondant sont les limites des zones de Brillouin [33] présentées dans la section C.

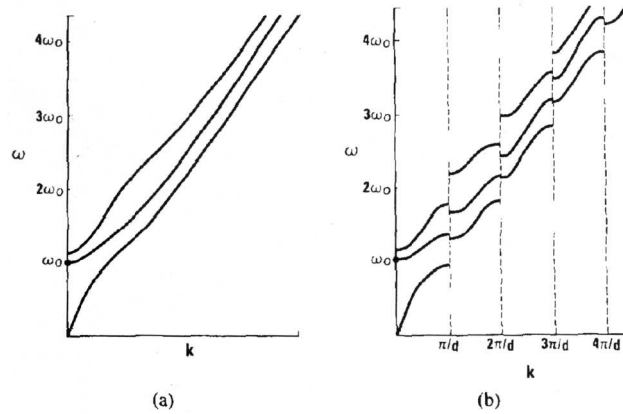


FIG. 2.17 – Représentation schématique de l'effet d'une microstructure périodique (b) de période d sur les courbes de dispersion d'une plaque homogène (a). D'après [21].

Pour un mode particulier, on parle d'entrée et de sortie de bande d'arrêt pour les fréquences inférieure et supérieure qui délimitent la bande d'arrêt. Lorsqu'une bande d'arrêt se crée, on parle aussi de levée de dégénérescence [31]. La nature du mode en entrée et en sortie de bande d'arrêt est la même, la longueur d'onde ne varie pas et la polarisation reste inchangée. La différence vient du fait que les inclusions du réseau sont soit sur des nœuds, soit sur des ventres de vibrations. Tout se passe comme si on avait un décalage du champ de déplacements d'un quart de longueur d'onde. La différence de pulsations, par extension l'existence de la bande d'arrêt, vient de la déformation de l'inclusion qui diffère suivant qu'elle soit sur un nœud ou sur un ventre de vibrations.

Chapitre 3

Effets de diaphonie dans les sondes multi-éléments : concepts et caractérisation

3.1 Origine de la diaphonie

Comme on l'a vu précédemment, l'intérêt des sondes multi-éléments est d'utiliser un grand nombre de transducteurs élémentaires – on peut aussi parler d'antennes acoustiques élémentaires – pour produire un faisceau que l'on dévie et focalise grâce à une électronique adaptée afin d'illuminer la zone désirée.

La diaphonie est le couplage d'un élément du réseau avec un autre. Dans l'absolu, une sonde à deux éléments peut présenter de la diaphonie.

Si on considère le cas idéal où les éléments sont totalement découplés les uns des autres, la forme du faisceau en champ lointain est décrite par le produit de la forme du faisceau émis par un élément du réseau, par la forme du faisceau d'un réseau linéaire équivalent de sources ponctuelles [8, 34]. Dans tous les cas, cette description idéale ne prend pas en compte les différents effets de diaphonie entre les antennes élémentaires. En pratique, les éléments sont excités simultanément avec plus ou moins d'amplitude et de retard afin d'obtenir le faisceau ultrasonore désiré, tant en profondeur de focalisation qu'en angle de déflexion. Toutefois, exciter un élément revient aussi à exciter de façon plus ou moins importante d'autres éléments par couplages, et ce de façon indésirable. Autrement dit, faire rayonner un élément revient à faire rayonner d'autres éléments, ce qui peut dégrader le faisceau. Dans cette partie, nous faisons une revue des différents couplages qui peuvent se produire dans une sonde typique.

Globalement, les effets de diaphonie peuvent prendre deux formes. La première est le couplage électrique où le signal d'excitation peut apparaître sur d'autres voies que celle d'excitation, que ce soit via les éléments eux-mêmes (couplage électrostatique) ou via la proximité des câbles reliant les éléments à l'instrumentation (mutuelles selfiques, capacités parasites).

La deuxième forme est le couplage acoustique. On peut globalement distinguer plusieurs causes : le simple entraînement des voisins immédiats de l'élément actif, dû à la continuité du milieu et à la déformation de l'élément excité ; la propagation de modes élastiques dans la structure générés par la vibration d'un élément. Dans le deuxième cas, contrairement au premier, il y a propagation d'énergie dans la structure. De plus, les antennes du réseau reposent sur le même support et rayonnent dans le même milieu de propagation. Il y a donc couplage acoustique au travers de ces deux media et les éléments se "voient" les uns les autres par ce biais.

La figure 3.1 montre une sonde classique, constituée d'un certain nombre d'éléments piézoélectriques

(classiquement des barreaux de PZT), portés par un matériau absorbant, recouverts d'une ou de plusieurs lames d'adaptation d'impédance découpées et d'une feuille protectrice pour empêcher le liquide de couplage de pénétrer entre les éléments, par exemple un film de mylar.

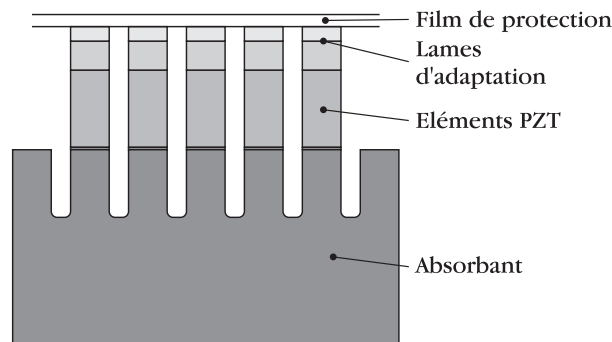
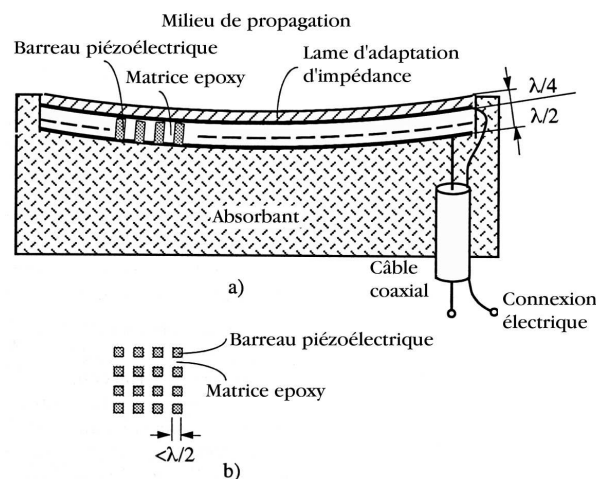


FIG. 3.1 – Schéma d'une sonde classique.

Certains modes se propageant dans la structure sont bien connus [7] :

Ondes de Rayleigh Le matériau absorbant, que l'on peut considérer comme semi-infini à l'échelle des éléments piézoélectriques, sert de support à une onde de type Rayleigh. Celle-ci se propage à la surface de l'absorbant. Son amplitude décroît exponentiellement avec la profondeur de l'absorbant. On considère généralement qu'elle s'étend sur deux longueurs d'onde en profondeur. La solution habituellement employée consiste à découper le backing sur une profondeur équivalente entre les éléments. Ces tranchées sont souvent qualifiées de sous-découpes, les découpes concernant la séparation des éléments.

Ondes de Lamb Les ondes de Lamb se propagent dans les plaques [3] et sont polarisées dans le plan sagittal, i.e. les déplacements sont transverses verticaux ou longitudinaux. Dans le cas des sondes, elles peuvent se propager dans le film protecteur reliant tous les éléments entre eux. Notons de plus que les sondes modernes mono-éléments ou multi-éléments utilisent de plus en plus la technologie piézocomposite. La figure 3.2 montre une sonde construite autour d'un composite 1-3. Les composites sont aussi susceptibles de propager des ondes de Lamb.



On peut noter plusieurs conséquences de ces couplages. Le simple entraînement accroît le nombre d'éléments vibrants par rapport au nombre d'éléments excités et conduit à un élargissement du faisceau acoustique, comme illustré sur la figure 3.3(a). Cet élargissement nuit à la résolution latérale de l'image.

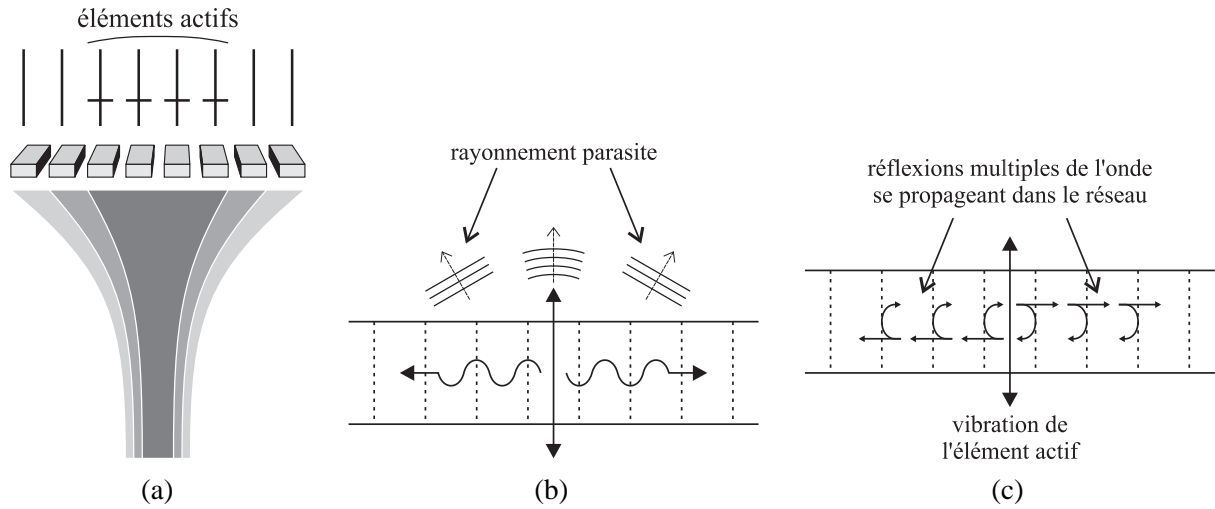


FIG. 3.3 – Différentes conséquences des effets de diaphonie : (a) élargissement de l'ouverture effective, (b) propagation d'un mode parasite pouvant rayonner, (c) piégeage d'énergie dans le réseau par réflexions partielles multiples.

La propagation de modes propres du réseau induit plusieurs effets : perte d'énergie dans la structure aux dépens de l'énergie utile rayonnée ; possible rayonnement indésirable du mode propagatif (figure 3.3(b)) ; réflexions multiples de l'onde sur les différentes interfaces du réseau conduisant à un allongement de la durée de l'impulsion transmise, c'est-à-dire à une dégradation de la bande passante (modification du spectre), comme illustré sur la figure 3.3(c).

Il est donc nécessaire de comprendre de quelle façon les couplages altèrent la bande passante théorique de la sonde et comment ils dégradent le faisceau. Cela implique d'avoir une bonne compréhension préalable des ondes pouvant se propager dans un réseau périodique, et donc de développer des outils spécifiques, robustes et flexibles.

On a ici illustré les effets de diaphonie sur des sondes 1D, pour lesquelles l'excitation d'un élément peut créer une onde qui se propage le long de la structure et qui est guidée par celle-ci suivant une direction. Dans le cas d'une sonde 2D, l'excitation d'un élément peut créer une onde qui se propage dans toutes les directions du plan du réseau. Si on considère idéalement cet élément comme une source ponctuelle dans un "réseau isotrope", l'onde émise est cylindrique et se propage sans rencontrer d'obstacles. Dans une sonde réelle, l'onde émise rencontre des obstacles différents en fonction de la direction de propagation et sa vitesse par exemple peut varier en fonction de celle-ci, de même que l'onde est plus ou moins diffusée par ces obstacles. Tous les éléments d'une sonde 2D sont donc reliés entre eux et interagissent. On ne peut donc estimer et évaluer correctement les effets de diaphonie sans prendre en compte toutes les interactions intrinsèques à la composition et à la géométrie de la sonde.

Enfin, que l'on considère une sonde mono-élément dont l'élément de transduction est un composite, ou une sonde multi-éléments, il est aussi nécessaire de découpler les vibrations utiles des modes de structure. Les modes de plaque par exemple sont issus d'interférences constructives des ondes de Lamb se propageant dans la structure et se réfléchissant sur les bords. Autrement dit, identifier les ondes de Lamb se propageant dans un réseau permet d'éviter un couplage inopportun entre le mode d'épaisseur et un mode de structure.

3.2 Grandeurs harmoniques et mutuelles

Comme on l'a vu précédemment, l'étude des effets de diaphonie est un point clé pour l'optimisation des sondes modernes, que ce soit en termes de sensibilité ou de résolution. Il est nécessaire de définir rigoureusement une ou des grandeurs caractéristiques de ces effets. Afin de déterminer l'approche théorique la mieux adaptée, nous devons tenir compte des caractères spécifiques des objets que nous manipulons, sachant que nous voulons prendre en compte et profiter de la nature massivement périodique des sondes ultrasonores. Cela impose aussi de se placer dans un environnement de mesure compatible avec les hypothèses du modèle choisi et de respecter scrupuleusement les conditions expérimentales nécessaires à une comparaison théorie-expérience pertinente.

En 1981, Larson a défini un coefficient de diaphonie [7] comme la transformée de Fourier du coefficient de réflexion complexe de la sonde, et reliant la tension d'excitation d'un élément n à la pression de rayonnement d'un élément adjacent m . Un peu plus tard, Kino *et al.* [35] font apparaître dans leur modèle des termes similaires à ce que nous pourrions appeler contraintes harmoniques et mutuelles, suivant la définition que nous en donnons un peu plus loin. Dans chacun des cas, la définition d'un coefficient de diaphonie est suivie d'une méthode analytique pour le calculer qui ne peut tenir compte de tous les couplages intervenant dans des sondes de plus en plus complexes. De plus, les conditions dans lesquelles ces coefficients sont définis ne sont pas exprimées de manière simple et rigoureuse. On retient néanmoins l'idée de relier la pression émise par un élément m (ou toute autre grandeur) à la tension d'excitation appliquée à un élément n par un coefficient de couplage C_{mn} . On propose une méthode générale permettant de déterminer ces coefficients.

Dans nos travaux, on utilise l'approche de Zhang *et al.* [36] bien connue dans le domaine des ondes de surface et inexploitée dans les autres domaines tels que l'imagerie. On généralise ce concept aux réseaux de transducteurs bi-périodiques, qui sont représentatifs des piézocomposites 1-3 ainsi que des sondes 2D pour l'imagerie 3D, et qui représentent le cas le plus difficile à traiter.

3.2.1 Définition de l'admittance harmonique et des admittances mutuelles

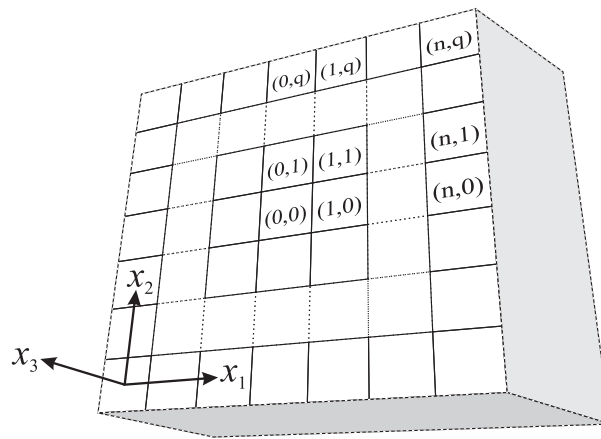


FIG. 3.4 – Portion d'un réseau bidimensionnel infini de transducteurs élémentaires.

Considérons d'abord le cas général d'un réseau bi-périodique infini dont tous les éléments sont mis à la masse, sauf un (par exemple l'élément (m, p)), comme illustré sur la figure 3.5 :

$$V_{n,q} = \begin{cases} V_{m,p} \neq 0 & \text{pour } n = m \text{ et } q = p \\ 0 & \text{pour } n \neq m \text{ ou } q \neq p. \end{cases} \quad (3.1)$$

Les indices n et q sont les coordonnées de la cellule considérée, dans le réseau bidimensionnel de transducteurs élémentaires, comme représenté sur la figure 3.4.

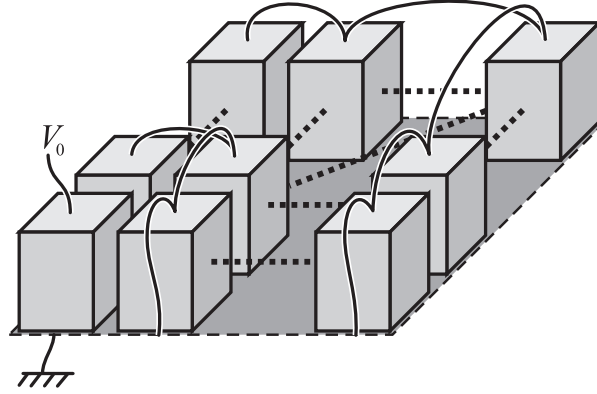


FIG. 3.5 – Conditions aux limites électriques pour lesquelles on définit la notion d'admittances mutuelles.

Dans ces conditions, l'admittance mutuelle entre deux éléments, $y_{m-n,p-q}$, est définie par le rapport $I_{n,q}/V_{m,p}$, soit encore :

$$I_{n,q} = y_{m-n,p-q} V_{m,p}, \quad (3.2)$$

où $I_{n,q}$ est le courant circulant entre les électrodes de la cellule (n, q) du réseau et $V_{m,p}$ le potentiel appliqué à la cellule (m, p) , conformément à l'équation (3.1).

Dans le cas d'une distribution de potentiels quelconque, le théorème de superposition permet d'écrire :

$$I_{n,q} = \sum_{m,p=-\infty}^{+\infty} y_{m-n,p-q} V_{m,p}. \quad (3.3)$$

On considère maintenant une distribution de potentiels spécifique, appelée excitation harmonique dans le domaine spatial, pour laquelle la phase du potentiel varie linéairement avec m et p comme représenté sur la figure 3.6 :

$$V_{m,p} = V_0 \exp(-j2\pi(m\gamma_1 + p\gamma_2)). \quad (3.4)$$

γ_1 et γ_2 sont appelés paramètres d'excitation. Autrement dit, on applique des différences de phase égales à $2\pi\gamma_1$ et $2\pi\gamma_2$ entre deux rangées voisines le long de x_1 et x_2 respectivement.

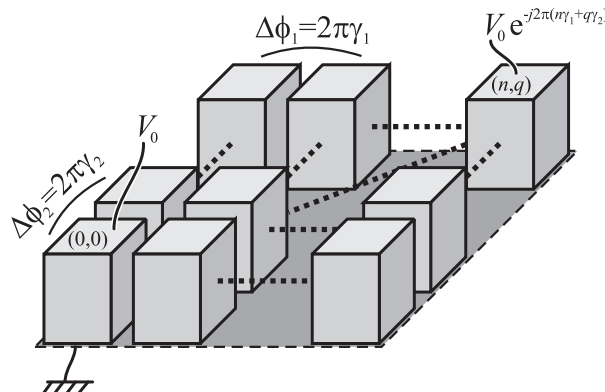


FIG. 3.6 – Schéma de l'excitation harmonique (dans le domaine spatial).

On peut ensuite écrire :

$$V_{m,p} = V_{n,q} \exp(-j2\pi((m-n)\gamma_1 + (p-q)\gamma_2)). \quad (3.5)$$

Les équations (3.3) et (3.5) impliquent :

$$Y(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{I_{n,q}}{V_{n,q}} = \sum_{m,p=-\infty}^{+\infty} y_{m-n,p-q} \exp(-j2\pi((m-n)\gamma_1 + (p-q)\gamma_2)), \quad (3.6)$$

que l'on peut réécrire en posant $n = q = 0$ sans perte de généralité :

$$Y(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{m,p=-\infty}^{+\infty} y_{m,p} \exp(-j2\pi(m\gamma_1 + p\gamma_2)), \quad (3.7)$$

où m et p représentent maintenant la distance de chaque cellule par rapport à une cellule de référence, par exemple la cellule $(0, 0)$. Le rapport entre $I_{n,q}$ et $V_{n,q}$ définit l'admittance harmonique $Y(\gamma_1, \gamma_2)$, au sens de l'excitation harmonique spatiale décrite dans l'équation (3.4). $Y(\gamma_1, \gamma_2)$ est une fonction paire doublement périodique de périodes 1 et symétrique autour de $\gamma_1 = 0,5$ et de $\gamma_2 = 0,5$.

L'admittance harmonique s'écrit comme une série de Fourier dont les termes $y_{m,p}$ sont les coefficients. Par réciprocité on peut écrire :

$$y_{m,p} = \int_0^1 \int_0^1 Y(\gamma_1, \gamma_2) \exp(j2\pi(m\gamma_1 + p\gamma_2)) d\gamma_1 d\gamma_2, \quad (3.8)$$

où les admittances mutuelles sont obtenues par transformée de Fourier de l'admittance harmonique. La parité de $Y(\gamma_1, \gamma_2)$ impliquent que : $y_{-m,p} = y_{m,p}$ et $y_{m,-p} = y_{m,p}$.

Le calcul de l'admittance harmonique $Y(\gamma_1, \gamma_2)$ nous permet donc d'accéder aux admittances mutuelles $y_{m,p}$, qui contiennent toute l'information sur le couplage dû à tous les modes élastiques possibles. Nous montrons plus loin comment ces notions peuvent être exploitées à l'aide de modèles analytico-numériques capables de calculer des grandeurs harmoniques.

Les admittances mutuelles ainsi définies rendent compte de tous les effets de diaphonie dans une structure périodique, en respectant les conditions intrinsèques au calcul (conditions aux limites électriques et réseau périodique infini). De plus, grâce au théorème de superposition (3.3), nous sommes capables d'évaluer la réponse d'un réseau de transducteurs à une distribution de potentiels quelconque ou une stratégie d'excitation particulière. Les éléments passifs peuvent être mis à la masse, en circuit ouvert, ou encore chargés sur une impédance donnée, réelle ou complexe, afin de tenir compte des conditions opératoires réelles de la sonde (émission, réception). Cela signifie que quels que soient les critères choisis pour définir et caractériser les effets de diaphonie dans une sonde – critères qui peuvent changer en fonction de l'utilisateur ou de l'usage qui est fait de la sonde – le modèle sait en tenir compte.

De plus, au-delà du calcul des admittances mutuelles, l'admittance harmonique permet d'accéder à une meilleure compréhension des effets subtils qui interviennent dans le fonctionnement d'une sonde périodique. Elle permet en effet d'identifier les différentes vibrations (propagatives ou non) de celle-ci et ainsi leurs contributions respectives aux admittances mutuelles, et peut-être alors de trouver des solutions pour s'en affranchir.

3.2.2 Réponse mécanique, directivité et bande passante

Les concepts d'admittances harmonique et mutuelle peuvent être étendus à toute vibration du réseau, en particulier aux déplacements normaux de la face avant d'une sonde réelle. En calculant les déplacements normaux mutuels, on obtient le profil de déplacement du réseau en face avant dans les conditions de définition des grandeurs mutuelles (éléments passifs en court-circuit et réseau infini). On peut alors calculer le champ de pression réel dans le milieu de propagation, qui tient compte de tous les phénomènes de diaphonie intervenant dans le fonctionnement de la sonde.

De même, si l'on sait calculer la pression délivrée en face avant du transducteur dans les conditions de calcul de l'admittance harmonique, on sait alors calculer des "pressions mutuelles" qui sont en toute rigueur les moyennes des forces normales générées par chaque élément du réseau, encore une fois dans les hypothèses de définition des grandeurs mutuelles. La pression mutuelle de l'élément actif (en Pa/V) en fonction de la fréquence donne la fonction de transfert de la sonde en émission et l'on peut voir l'effet des diaphonies sur la bande passante.

3.2.3 Electrodes recouvrant plusieurs périodes

On présente ici une exploitation possible des concepts d'admittances harmonique et mutuelle. Les éléments d'un réseau de phases sont délimités par leurs électrodes. Dans le cas d'une sonde construite autour d'un composite sans sous-découpe, seules les électrodes imposent la taille des éléments puisque le composite lui-même n'est pas découpé. D'après ces constatations, on établit des formules rendant compte de la période électrique en plus de la période mécanique intrinsèque à la géométrie du réseau de transducteurs.

Pour ce faire, on considère le cas d'une sonde périodique 1D dont la période électrique d_e est un multiple de la période mécanique d_m . Dans un premier temps, on s'intéresse au cas où les électrodes recouvrent deux périodes mécaniques (voir figure 3.7).

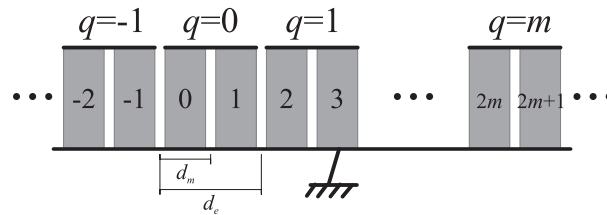


FIG. 3.7 – Schéma d'un réseau de transducteurs dont les éléments électriques sont doubles des éléments mécaniques.

On peut écrire :

$$V_{2m} = V_{2m+1} = V_0 e^{-j2\pi m\gamma} = V_{2n} e^{-j2\pi(m-n)\gamma} = V_{2n+1} e^{-j2\pi(m-n)\gamma}, \quad (3.9)$$

où γ représente le paramètre d'excitation électrique de la structure.

Pour une telle excitation électrique, l'admittance harmonique $Y^{(2)}(\gamma)$ s'écrit comme le rapport des intensités parcourant un élément électrique (deux éléments mécaniques) sur le potentiel appliqué :

$$Y^{(2)}(\gamma) = \frac{I_{2n} + I_{2n+1}}{V_{2n}}, \quad (3.10)$$

soit encore :

$$Y^{(2)}(\gamma) = \frac{I_{2n}}{V_{2n}} + \frac{I_{2n+1}}{V_{2n+1}}. \quad (3.11)$$

D'après l'équation (3.3), les intensités dans les électrodes $2n$ et $(2n + 1)$ s'écrivent :

$$I_{2n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_{2m-2n} V_{2m} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_{(2m+1)-2n} V_{2m+1}, \quad (3.12)$$

$$I_{2n+1} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_{2m-(2n+1)} V_{2m} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_{(2m+1)-(2n+1)} V_{2m+1}, \quad (3.13)$$

soit encore en utilisant (3.9) :

$$I_{2n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_{2(m-n)} V_{2n} e^{-j2\pi(m-n)\gamma} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_{2(m-n)+1} V_{2n} e^{-j2\pi(m-n)\gamma}, \quad (3.14)$$

$$I_{2n+1} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_{2(m-n)-1} V_{2n+1} e^{-j2\pi(m-n)\gamma} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_{2(m-n)} V_{2n+1} e^{-j2\pi(m-n)\gamma},$$

et finalement, en posant $q = m - n$:

$$\frac{I_{2n}}{V_{2n}} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (y_{2q} + y_{2q+1}) e^{-j2\pi q\gamma}, \quad (3.15)$$

$$\frac{I_{2n+1}}{V_{2n+1}} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (y_{2q-1} + y_{2q}) e^{-j2\pi q\gamma}. \quad (3.16)$$

On obtient alors l'expression de l'admittance harmonique :

$$Y^{(2)}(\gamma) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (y_{2q-1} + 2y_{2q} + y_{2q+1}) e^{-j2\pi q\gamma}. \quad (3.17)$$

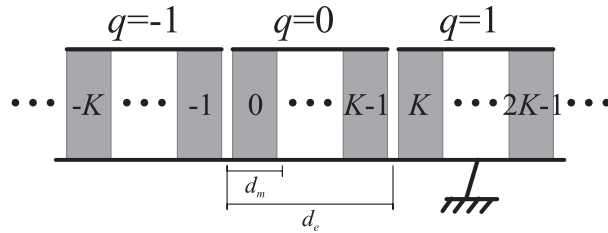


FIG. 3.8 – Schéma d'un réseau de transducteurs dont les éléments (électriques) sont définis par la taille des électrodes.

On généralise maintenant à $d_e = K d_m$ (voir figure 3.8). Pour $0 \leq k, l < K$:

$$V_{Km+k} = V_0 e^{-j2\pi m\gamma} = V_{Kn+l} e^{-j2\pi(m-n)\gamma}. \quad (3.18)$$

L'intensité dans l'électrode $Kn + l$ s'écrit :

$$I_{Kn+l} = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_{Km+k-Kn-l} V_{Km+k}, \quad (3.19)$$

d'où :

$$\frac{I_{Kn+l}}{V_{Kn+l}} = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_{K(m-n)+k-l} e^{-j2\pi(m-n)\gamma}, \quad (3.20)$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} y_{Kq+k-l} e^{-j2\pi q\gamma}. \quad (3.21)$$

L'admittance harmonique s'écrit comme la somme sur l du rapport précédent :

$$Y^{(K)}(\gamma) = \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} y_{Kq+k-l} e^{-j2\pi q\gamma}, \quad (3.22)$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k,l=0}^{K-1} y_{Kq+k-l} \right) e^{-j2\pi q\gamma}. \quad (3.23)$$

Après quelques étapes de calcul, et en tenant compte de la structure Toeplitz de la matrice des admittances mutuelles qui relie le vecteur des courants (I_p) au vecteur des tensions (V_p), l'admittance harmonique s'écrit :

$$\begin{aligned} Y^{(K)}(\gamma) = & K y_0 + 2 \sum_{k=1}^{K-1} (K-k) y_k \\ & + \sum_{q=1}^{+\infty} \left[\left(\sum_{k=-K+1}^{K-1} (K-|k|) y_{Kq+k} \right) 2 \cos(2\pi q\gamma) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

De plus, il découle de l'équation (3.22) une expression des admittances mutuelles $y_q^{(K)}$ pour la sonde dont on considère alors les éléments électriques q tels que représentés sur la figure 3.8 :

$$y_q^{(K)} = \sum_{k,l=0}^{K-1} y_{Kq+k-l}. \quad (3.25)$$

3.2.4 Vers une réduction du problème

Nous avons défini des grandeurs caractéristiques des effets de diaphonie : les grandeurs mutuelles, que nous savons déterminer via les grandeurs harmoniques correspondantes. Grâce à ces principes de calcul, on montre que l'on peut réduire l'analyse d'une structure doublement périodique à l'étude de sa plus petite période mécanique. Ce point est essentiel et justifie l'approche de l'analyse harmonique que l'on se propose de développer ensuite dans nos modèles de calcul numérique.

Nous allons de fait montrer, au travers de l'analyse de différentes structures, l'intérêt de cette approche, tant en termes de simplicité de mise en œuvre et de temps de calcul, qu'en termes d'informations que l'on peut tirer de l'exploitation des modèles ainsi établis sur le fonctionnement de ces structures. Au-delà de la possibilité de calculer les grandeurs mutuelles, ces informations pourraient justifier à elles seules l'analyse harmonique.

Deuxième partie

Méthodes de simulation

Introduction

D'un côté, les modèles unidimensionnels, tels que le modèle de Mason [37] ou le modèle KLM [38], ont longtemps été utilisés pour concevoir et optimiser les sondes ultrasonores. Ces approches très efficaces dans le cas de structures types (barreaux, plaques) se heurtent à la complexité des sondes actuelles, qui ne présentent plus systématiquement des architectures de base conformes aux archétypes. Il est alors nécessaire de faire appel à des méthodes qui rendent compte explicitement des géométries des sondes et de leur caractère inhomogène. Des méthodes numériques, telles que la méthode des différences finies [39] puis la méthode des éléments finis [40], ont été introduites pour pallier les limites des modèles unidimensionnels.

D'un autre côté, les sondes modernes reposent sur des structures massivement périodiques consistant en réseaux d'antennes acoustiques élémentaires, comme par exemple les composites piézoélectriques décrits dans la section 2.4. Ces réseaux de transducteurs sont en plus la plupart du temps collés à un absorbant, qui peut être lui-même sous-découpé, et recouverts d'une ou plusieurs lames découpées ou non. La densité de sources des sondes modernes, par exemple un réseau bidimensionnel de 64×64 transducteurs pour l'imagerie tridimensionnelle, rend difficile la simulation des structures complètes. Autrement dit, le nombre croissant d'éléments du réseau conduit à des problèmes toujours plus grands et la taille devient un critère prohibitif. De plus, la nature périodique de ces sondes induit des effets supplémentaires tels que l'apparition de bandes d'arrêt ou des phénomènes de type diffraction de Bragg qui ne peuvent être clairement analysés sans un effort de représentation et de formalisation minimum.

Il nous a donc semblé judicieux de considérer le caractère périodique de ces sondes comme primordial dans notre démarche. Autrement dit, on s'attache à réduire la taille des modèles sans pour autant perdre en généralité, c'est-à-dire en tenant compte des phénomènes de propagation des ondes dans le réseau et en tenant compte aussi du rayonnement des éléments dans le milieu de propagation. On tient aussi, autant que possible, à garder une grande flexibilité quant à la géométrie de la sonde qui doit être correctement et explicitement décrite. Cette démarche s'appuie intimement sur les concepts de grandeurs harmonique et mutuelle exposées dans la section 3.2. Elle implique que le réseau de transducteurs constituant la sonde soit considéré infini suivant ses directions de périodicité, et donc de ne pas directement prendre en compte certains effets de bord.

Nous écartons donc d'emblée une méthode d'homogénéisation [41] incapable de décrire les effets spécifiquement dus au caractère périodique et inhomogène des sondes ultrasonores. Parmi les outils de modélisation disponibles actuellement, nous avons d'une part les différences finies, les volumes finis et les éléments finis qui sont des méthodes de discrétisation spatiale (échantillonnage spatial). La méthode des éléments finis, dont la robustesse n'est plus à démontrer, est de loin la plus flexible et la plus adaptée à la simulation de structures tridimensionnelles piézoélectriques. D'autre part, une méthode de décomposition spectrale cette fois-ci (échantillonnage spectral) est aussi à envisager, la méthode de développement en ondes planes étant très prisée dans le domaine des cristaux phononiques (analogues des cristaux photoniques en élasticité).

Parce que ces deux types d'approches sont sensés donner des résultats comparables malgré leurs natures

radicalement différentes, il est nécessaire de mettre en question la pertinence de nos résultats. Par souci de rigueur et de complétude, on décide d'appuyer notre démarche sur le recoupement des informations fournies par les deux méthodes. Un enrichissement croisé des deux approches apparaît au travers des chapitres suivants, permettant d'établir des stratégies d'utilisation d'un modèle ou de l'autre en fonction de l'analyse envisagée.

Chapitre 4

Préambules

4.1 Modèle unidimensionnel

Des schémas électriques équivalents, tels que le modèle de Mason [37] ou le modèle KLM [38], ont été et sont encore très utilisés pour la conception et l'optimisation de sondes ultrasonores. Les transducteurs sont alors pris comme un empilement de couches (matériau piézoélectrique, électrodes, lames d'adaptation d'impédance, milieux de propagation). Les effets de bord sont négligés et la vibration est décrite par des champs scalaires : forces exercées aux surfaces des couches et vitesses de vibration, normales au plan du transducteur. Ces schémas équivalents sont établis à partir des équations du modèle unidimensionnel [2].

4.1.1 Le transducteur comme résonateur

On considère une simple plaque piézoélectrique métallisée sur ses deux faces et non chargée mécaniquement. Son admittance électrique se calcule à partir de la matrice des impédances électromécaniques [2].

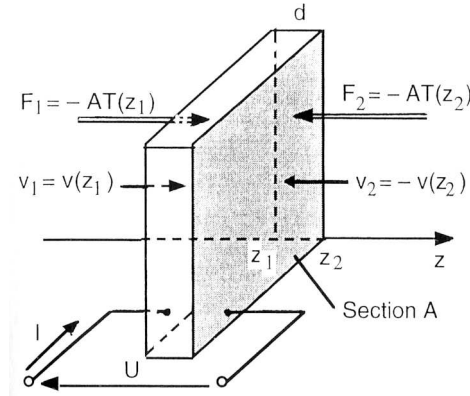


FIG. 4.1 – Tranche de matériau piézoélectrique et grandeurs physiques entrant dans le modèle unidimensionnel. D'après [2].

Celle-ci est établie à partir d'un modèle unidimensionnel [2] qui relie les forces F_1 et F_2 exercées sur les deux faces d'une "tranche" piézoélectrique d'épaisseur d (figure 4.1), et la tension électrique appliquée U , aux vitesses "entrantes" v_1 et v_2 et au courant injecté I , tel que :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ U \end{pmatrix} = -j \begin{bmatrix} ZA/\tan(kd) & ZA/\sin(kd) & e/(\varepsilon^S\omega) \\ ZA/\sin(kd) & ZA/\tan(kd) & e/(\varepsilon^S\omega) \\ e/(\varepsilon^S\omega) & e/(\varepsilon^S\omega) & 1/\omega C_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ I \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

avec : $k = \omega/V$ et $V = \sqrt{c^E/\rho}$, où V est la vitesse des ondes dans le milieu et c^E la rigidité dans la dimension considérée. e est la constante piézoélectrique et ε^S est la constante diélectrique du matériau piézoélectrique, toujours dans la direction considérée par le modèle unidimensionnel.

Dans le cas d'un transducteur (matériau piézoélectrique métallisé d'impédance élastique Z_P), dont on néglige l'épaisseur des électrodes, et chargé par deux milieux d'impédance Z_1 et Z_2 respectivement en face arrière et en face avant du transducteur, l'impédance électrique d'entrée s'écrit :

$$Z_e = \frac{1}{j\omega C_0} \left(1 + \frac{K^2}{\varphi} Z_P \frac{2Z_P(1 - \cos \varphi) - j(Z_1 + Z_2) \sin \varphi}{-(Z_P^2 + Z_1 Z_2) \sin \varphi + jZ_P(Z_1 + Z_2) \cos \varphi} \right), \quad (4.2)$$

où $\varphi = kd$. Dans le cas du résonateur libre ($Z_1 = Z_2 = 0$), elle devient :

$$Z_e = \frac{1}{j\omega C_0} \left(1 - K^2 \frac{\tan(\varphi/2)}{\varphi/2} \right). \quad (4.3)$$

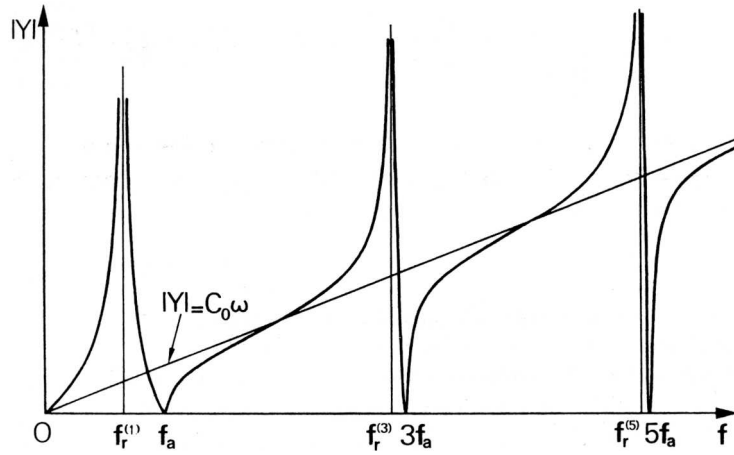


FIG. 4.2 – Module de l'admittance d'un résonateur piézoélectrique libre. D'après [2].

L'admittance résultante $Y = 1/Z_e$ est présentée sur la figure 4.2. La droite $|Y| = \omega C_0$ est due à la capacité statique de la plaque piézoélectrique. L'admittance s'annule (impédance infinie) pour chaque multiple impair de la fréquence d'antirésonance f_a . Elle est infinie pour les fréquences de résonance $f_r^{(n)}$. En pratique, les pertes dues au matériau (pertes de propagation), aux réflexions partielles sur les faces (pertes par rayonnement) et aux électrodes (pertes par effet Joule) induisent des valeurs finies d'admittance et d'impédance à la résonance et à l'antirésonance respectivement. De même, les passages par zéro deviennent des minima.

La mesure de la fréquence d'antirésonance f_a fournit la vitesse de phase V_ϕ par la relation :

$$V_\phi = 2 f_a d, \quad (4.4)$$

où d est l'épaisseur de la plaque, et les mesures combinées de f_a et de la première fréquence de résonance $f_r = f_r^{(1)}$ donnent le couplage électromécanique K tel que :

$$K^2 = \frac{\pi}{2} \frac{f_r}{f_a} \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{f_a - f_r}{f_a} \right). \quad (4.5)$$

Il est donc important de noter que l'épaisseur du transducteur fixe la fréquence d'antirésonance et non la fréquence de résonance. La fréquence de résonance est elle-même liée au couplage électromécanique

du matériau piézoélectrique. Les deux relations ci-dessus s'avèrent très utiles quant à la caractérisation des transducteurs.

Au voisinage de la première résonance, une expression approchée de l'admittance est donnée par la relation :

$$Y = j C_0 \omega \frac{\omega_a^2 - \omega^2}{\omega_r^2 - \omega^2}, \quad (4.6)$$

avec :

$$\omega_r^2 = \omega_a^2 \left(1 - \frac{8 K^2}{\pi^2} \right). \quad (4.7)$$

On représente le résonateur à l'aide d'un schéma électrique équivalent composé de la capacité statique C_0 de la lame piézoélectrique et d'un circuit résonant série $L_1 C_1$ disposé en parallèle, où L_1 et C_1 sont appelées inductance et capacité motionnelles, respectivement. Son admittance est donnée par :

$$Y = j C_0 \omega \left(1 + \frac{C_1/C_0}{1 - L_1 C_1 \omega^2} \right). \quad (4.8)$$

Par identification, la capacité et l'inductance motionnelles sont données par : $C_1 \cong \frac{8K^2}{\pi^2} C_0$ et $L_1 \cong \frac{\rho d^3}{8e^2 A}$, soit $\frac{f_a - f_r}{f_r} \cong \frac{C_1}{2C_0}$.

Les pertes sont prises en compte par une résistance R_1 placée en série avec le circuit $L_1 C_1$ telle que $Q = L_1 \omega_r / R_1$ où Q est le coefficient de qualité du résonateur.

4.1.2 Circuits équivalents

Il est souvent pratique d'utiliser un circuit électrique équivalent pour modéliser le comportement d'un transducteur [2, 42]. Il est plus facile alors d'analyser les interactions entre le transducteur, les lames extérieures et le milieu de propagation, dès lors que l'on se ramène à un schéma électrique équivalent familier.

Deux circuits équivalents sont couramment utilisés pour modéliser le fonctionnement d'un transducteur. Le premier et le plus ancien est le modèle de Mason [37] qui se déduit de la matrice des impédances électromécaniques exposée précédemment [2]. Le schéma équivalent d'un transducteur réduit à sa plus simple expression (matériau piézoélectrique avec ses électrodes) est représenté sur la figure 4.3. Toutes les couches constitutives du transducteur peuvent être prises en compte par le modèle, qu'elles soient piézoélectriques ou non.

Chaque couche comporte deux accès mécaniques dont les intensités entrantes représentent les vitesses de vibration $v = \partial u / \partial t$ et les tensions représentent les forces F sur chaque face. La couche piézoélectrique comporte en plus un accès électrique où U est la tension électrique appliquée aux faces métallisées. La piézoélectricité est prise en compte par un transformateur électromécanique de rapport $N = h C_0$, où $h = e / \varepsilon^S$ et e est la constante piézoélectrique suivant l'axe normal au transducteur. Le rapport de transformation a une dimension égale à un courant divisé par une vitesse : on a au primaire une entrée électrique et au secondaire une sortie "mécanique".

Le deuxième circuit équivalent très usité est le modèle KLM [38], des noms de Krimholtz, Leedom et Matthaei, illustré sur la figure 4.4 dans le cas d'un disque de matériau piézoélectrique.

Il s'agit d'une ligne de transmission, qui traduit la propagation, au centre de laquelle est injectée un courant à la sortie d'un transformateur électromécanique. La partie électrique fait apparaître en plus de la capacité statique C_0 une capacité supplémentaire C dépendante de la fréquence et fonction du couplage électromécanique $K = e / \sqrt{\varepsilon^S c^D} = e / \sqrt{\varepsilon^S c^E + e^2}$ [3] pour une plaque (aussi dénommé k_t par opposition

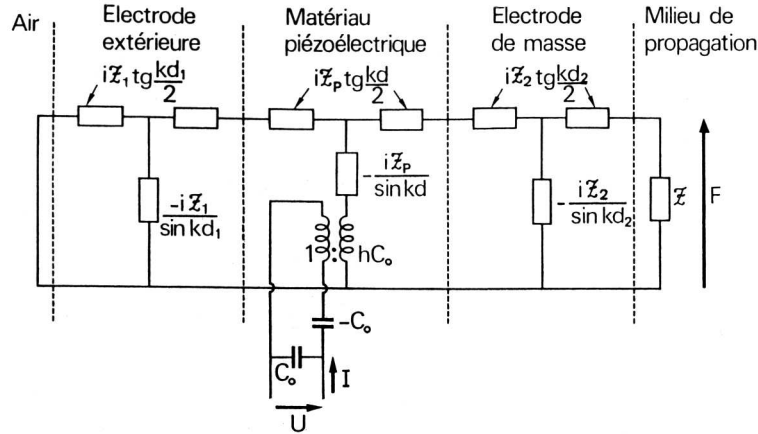


FIG. 4.3 – Modèle de Mason. Circuit équivalent complet d'un transducteur. Chaque couche d'épaisseur d est caractérisée par son impédance mécanique $Z = ZA$ où A est la section du transducteur. $C_0 = \epsilon^S A/d$ est la capacité statique de la couche piézoélectrique. D'après [2].

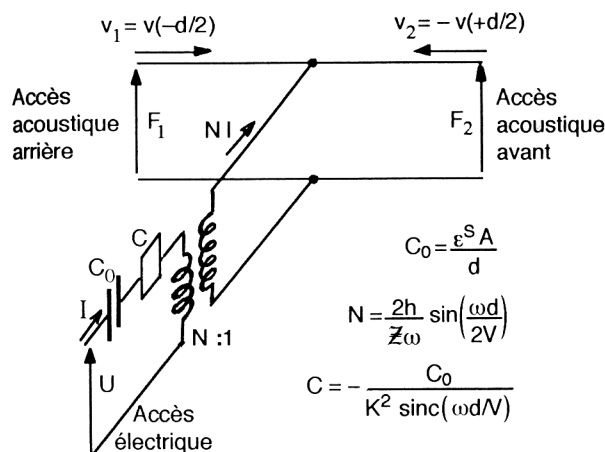


FIG. 4.4 – Modèle KLM. Circuit équivalent d'une couche piézoélectrique. Tiré de [2].

au couplage k_{33} d'un barreau). Dans le modèle KLM, le rapport de transformation N dépend aussi de la fréquence.

Ces deux modèles sont encore très utilisés pour l'étude des sondes à large bande et comportant plusieurs lames d'adaptation d'impédance. Toutefois, les sondes actuelles deviennent de plus en plus complexes et s'éloignent de plus en plus de ces formes simples que sont les barreaux ou les plaques, et réclament dès lors des outils de conception nouveaux, adaptés à la prise en compte de géométries plus élaborées.

4.2 Mise en équations du problème piézoélectrique

Si le modèle unidimensionnel pouvait se permettre d'utiliser des équations simplifiées, le développement de méthodes pour la simulation des sondes modernes nécessite de considérer le problème complet, afin de prendre en compte les contributions les plus complexes. On donne ici les équations du problème piézoélectrique complet.

4.2.1 Conventions de notation

On utilise la convention d'Einstein, autrement dit la sommation sur les indices répétés. Par exemple $\sum_j a_{ij} q_j$ devient $a_{ij} q_j$.

On utilise aussi la convention de notation des dérivations :

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_j} = q_{i,j}, \quad (4.9)$$

et

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \dot{q}_i. \quad (4.10)$$

Enfin, les vecteurs seront notés en caractères gras, par exemple le vecteur des déplacements $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$, où T est la transposition.

Les céramiques piézoélectriques sont anisotropes. Leurs constantes physiques (rigidités, permittivités, etc.) sont des quantités tensorielles qui nécessitent une identification des directions. La direction de polarisation est usuellement choisie le long de l'axe Z du système d'axes cristallographiques X, Y, Z . Les directions des axes X, Y, Z sont représentées par 1, 2 et 3 respectivement et les composantes de cisaillement autour de ces axes par 4, 5 et 6 respectivement. La figure 4.5 résume ces conventions d'indices.

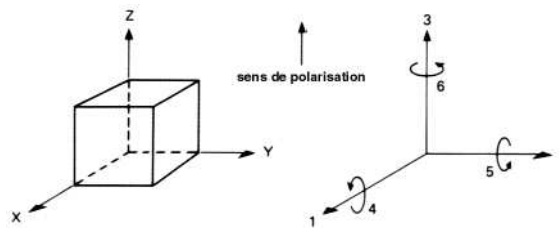


FIG. 4.5 – Désignation des axes et signification des indices.

4.2.2 Préambule : résultats de l'élasticité

Dans un solide soumis à des efforts extérieurs, le déplacement d'un élément dx se décompose en général en une translation u_i , une déformation $S_{ij}dx_j$ et une rotation locale $\Omega_{ij}dx_j$ [3] avec :

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{et} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) . \quad (4.11)$$

S_{ij} et Ω_{ij} sont respectivement les parties symétrique et antisymétrique du tenseur gradient des déplacements. S_{ij} est le *tenseur des déformations*. Les termes S_{ii} traduisent une dilatation tandis que les termes S_{ij} ($i \neq j$) traduisent un mouvement de cisaillement.

La mécanique dite des milieux continus donne, dans le cas d'un solide élastique (non piézo-électrique), l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + T_{ik,k} \quad (i = 1, 3), \quad (4.12)$$

où ρ est la masse volumique, u_i les déplacements, f_i les forces volumiques et T_{ij} est le *tenseur des contraintes*. Dans l'hypothèse des petites déformations, le comportement élastique d'un solide est correctement décrit par le terme du premier ordre du développement de Taylor de $T_{ij}(S_{kl})$:

$$T_{ij} \cong \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_{S_{kl}=0} S_{kl} = c_{ijkl} S_{kl} . \quad (4.13)$$

Les coefficients c_{ijkl} sont appelés tenseur des rigidités. Cette relation est appelée loi de Hooke. Elle s'écrit en fonction des déplacements :

$$T_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} . \quad (4.14)$$

Les termes T_{ii} traduisent des contraintes normales aux faces correspondant à des tractions ou à des compressions, tandis que les termes T_{ij} ($i \neq j$) traduisent des contraintes tangentielles correspondant à des forces de cisaillement.

4.2.3 Equations constitutives

Dans le cadre de l'approximation linéaire, les équations constitutives de la piézoélectricité peuvent s'écrire sous différentes formes suivant les variables d'état choisies pour le système étudié. Elles établissent le couplage entre les variables mécaniques (contraintes T_{ij} et déformations S_{kl}) et les variables électriques (champ E_k et déplacement D_i). Deux de ces formes sont :

$$S_{ij} = d_{ijk} E_k + s_{ijkl}^E T_{kl} , \quad (4.15)$$

$$D_i = \varepsilon_{ij}^T E_j + d_{ikl} T_{kl} , \quad (4.16)$$

et

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{ijk} E_k , \quad (4.17)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k . \quad (4.18)$$

Notons d'ores et déjà qu'on utilise le deuxième jeu d'équations (4.17) et (4.18) dans les développements des chapitres suivants, dans lesquels on choisit comme inconnues du problème les déplacements u_i et le po-

tentiel ϕ . Le matériau piézoélectrique est entièrement caractérisé par les tenseurs de ses constantes élastiques (constantes de rigidité) c_{ijkl} , de ses constantes piézoélectriques e_{ijk} et de ses constantes diélectriques ε_{ik} . Les indices E et S signifient que les constantes concernées sont définies à champ électrique constant et à déformations constantes, respectivement.

De plus, la vitesse de propagation d'une déformation ou d'une contrainte mécanique est très inférieure à celle d'un champ électrique. La vitesse des ondes élastiques est de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-5} celle des ondes électromagnétiques. On dit que le champ électromagnétique associé au champ élastique est *quasi-statique*. Comme en électrostatique, le champ électrique \mathbf{E} dérive d'un potentiel scalaire ϕ tel que :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \text{ encore écrit } E_k = -\phi_{,k} . \quad (4.19)$$

Le système d'équations (4.17) et (4.18) peut se réécrire :

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E u_{k,l} + e_{ijk} \phi_{,k} , \quad (4.20)$$

$$D_i = e_{ikl} u_{k,l} - \varepsilon_{ik}^S \phi_{,k} . \quad (4.21)$$

Macroscopiquement, les céramiques telles que le PZT sont assimilables aux cristaux de la classe 6mm du système hexagonal. Les tenseurs des constantes matériau se présentent suivant la figure 4.6.

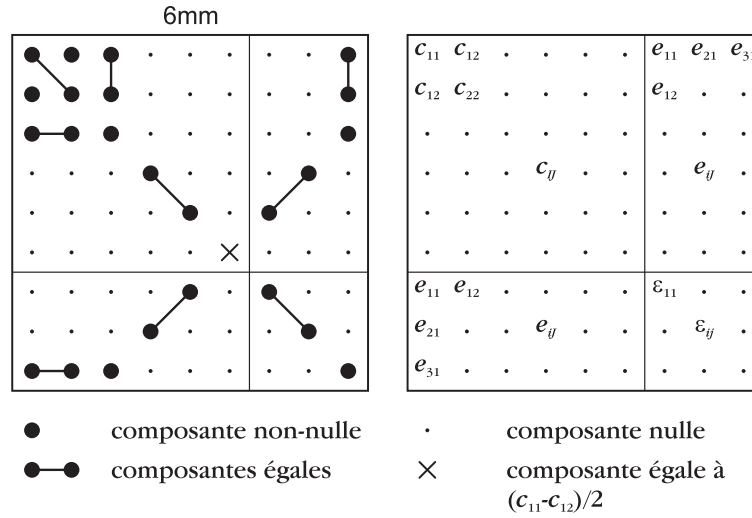


FIG. 4.6 – Tenseur des constantes de la classe 6mm du système hexagonal.

4.2.4 Equations d'équilibre

En l'absence de forces de volume, l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\rho \ddot{u}_i = T_{ik,k} \quad (i = 1, 3). \quad (4.22)$$

Dans un solide piézoélectrique, il n'y a pas de charge libre dans le volume. L'équilibre électrique est établi par l'équation de Poisson :

$$\text{div} \mathbf{D} = D_{i,i} = 0 . \quad (4.23)$$

4.2.5 Thermodynamique des solides

Considérons un volume élémentaire d'un solide élastique. Le travail δW effectué par les forces extérieures mécaniques, électriques et magnétiques est emmagasiné dans le solide sous forme d'énergie potentielle. En effet, dès que les forces extérieures sont supprimées, celle-ci est restituée par les contraintes internes qui redonnent au solide son état initial. De même la chaleur δQ reçue par le solide est stockée sous forme d'énergie potentielle.

Ainsi, la variation d'énergie interne est :

$$dU = \delta W + \delta Q . \quad (4.24)$$

D'après le premier principe de la thermodynamique, U est une fonction d'état du solide et dU est une différentielle exacte (ce qui n'est pas le cas de δW et δQ pris séparément). Soit un ensemble complet de variables d'état indépendantes X_1, \dots, X_n , la variation d'énergie interne s'écrit en fonction de ces variables :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial X_1} dX_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial X_n} dX_n . \quad (4.25)$$

Le travail δW est donné par [42] :

$$\delta W = T_{ij} dS_{ij} + E_i dD_i + H_i dB_i , \quad (4.26)$$

où se trouvent, dans l'ordre, les contributions d'origine mécanique, électrique et magnétique. D'après la seconde loi de la thermodynamique :

$$\delta Q = \theta d\sigma , \quad (4.27)$$

où θ est la température et σ l'entropie.

En conséquence, la variation d'énergie interne s'écrit :

$$dU = \theta d\sigma + T_{ij} dS_{ij} + E_i dD_i + H_i dB_i . \quad (4.28)$$

Elle est respectivement la somme de la chaleur, de l'énergie potentielle mécanique, de l'énergie potentielle électrique et de l'énergie potentielle magnétique.

Les variables d'état sont ici σ , S_{ij} , D_i et B_i . Si l'on veut utiliser un autre jeu de variables d'état pour caractériser le système, il est nécessaire de construire de nouvelles fonctions d'énergie (encore appelées potentiels thermodynamiques) telles que les différentielles des variables d'état apparaissent explicitement dans la différentielle de la fonction d'énergie. On peut choisir de façon arbitraire le jeu de variables d'état indépendantes à la condition qu'il n'y ait qu'une variable de chaque espèce (mécanique, électrique et thermique).

Dans les équations constitutives (4.17) et (4.18), les variables indépendantes sont S_{ij} et E_i . Pour les utiliser, on définit σ , S_{ij} , E_i et B_i comme variables d'état, autrement dit D_i est choisi à la place de E_i . Précisons que le choix de l'entropie σ plutôt que la température θ est motivé par le constat que, expérimentalement, les constantes élastiques effectives à haute fréquence sont celles calculées à entropie constante plutôt qu'à température constante. On construit le potentiel thermodynamique :

$$H = U - E_i D_i , \quad (4.29)$$

aussi appelé enthalpie électrique [43]. Dans ce cas :

$$dH = \theta d\sigma + T_{ij} dS_{ij} + E_i dD_i + H_i dB_i - d(E_i D_i) \quad (4.30)$$

$$= \theta d\sigma + T_{ij} dS_{ij} + H_i dB_i - D_i dE_i. \quad (4.31)$$

Bien d'autres fonctions d'énergie peuvent être construites. Certaines bien connues sont l'énergie libre d'Helmholtz ou l'énergie libre de Gibbs [3]. Le tout est que les variables d'état soient convenablement choisies et adaptées aux équations constitutives utilisées.

Remarquons enfin que d'après (4.17) :

$$c_{ijkl}^E = \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}}, \quad (4.32)$$

et d'après (4.31) :

$$T_{ij} = \frac{\partial H}{\partial S_{ij}}, \quad (4.33)$$

autrement dit les coefficients de rigidité peuvent être définis suivant :

$$c_{ijkl}^E = \frac{\partial^2 H}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}}, \quad (4.34)$$

$$c_{ijkl}^E = \frac{\partial^2 (U - E_i D_i)}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}}. \quad (4.35)$$

Chapitre 5

Méthode des éléments finis appliquée aux structures multi-périodiques rayonnantes

Bien que des logiciels éléments finis du marché (ANSYS, PZFlex entre autres) proposent une large gamme de fonctionnalités et un certain confort, des problèmes spécifiques comme ceux abordés dans ce travail nécessitent des développements adaptés et donc l'accès aux codes sources. Il a déjà été démontré par le passé, avec le code ATILA développé à l'ISEN, qu'il est possible de réduire la dimensionnalité du problème périodique en imposant des conditions aux limites adéquates [25, 26]. Depuis quelques années, les développements éléments finis mis en œuvre dans l'équipe Acoustique et Microsonique du LPMO reposent sur la base de la bibliothèque Modulef, initialement développée par l'INRIA [44]. Modulef est une bibliothèque d'éléments finis écrite en Fortran et relativement flexible. La formulation "périodique", mise en œuvre dans le code ATILA, est utilisée comme point de départ de nos développements dédiés aux structures périodiques. On superpose à cette formulation d'autres notions telles que le concept d'admittances harmoniques et mutuelles.

Historiquement, les notions de grandeurs harmoniques et mutuelles et de fonction (ou tenseur) de Green périodique ont été introduites pour l'étude des dispositifs à ondes de surface (DOS). Le rapprochement des savoir-faires "ondes de surface" et "transducteurs pour l'imagerie" a permis le mariage des techniques issues de chacun des domaines. Leur convergence vers une plate-forme générique a été rendue possible grâce à la proximité des problématiques : les effets de diaphonie peuvent trouver leur source dans des phénomènes propagatifs substantiellement proches de ceux étudiés en ondes de surface. Savoir les identifier et les caractériser signifie potentiellement savoir s'en affranchir.

Dans ces travaux, on reprend donc la démarche initiale proposée par l'ISEN, que l'on étend à des cellules élémentaires de géométries diverses, et à laquelle on superpose les notions de grandeurs harmoniques et mutuelles. Ces dernières donnent accès au fonctionnement global d'un réseau de transducteurs, quelle que soit la stratégie d'excitation appliquée, et quelle que soit la nature du milieu dans lequel la sonde rayonne, grâce à des conditions de rayonnement appropriées. Ce dernier point a été initié dans la thèse de Piranda [45] pour les structures bi-dimensionnelles.

Bien que ce soit possible, on ne s'attachera pas ici à déterminer les modes propres d'une structure au moyen d'un système aux valeurs propres comme cela a été fait précédemment [32]. On s'intéresse prioritairement au comportement des sondes périodiques en fonctionnement réel et on cherchera à déterminer des grandeurs caractéristiques telles que l'admittance de la sonde ou encore son profil de vitesse en face avant.

5.1 Théorie des éléments finis piézoélectriques

La méthode des éléments finis repose sur une expression globale de l'énergie du système, et sur la discrétisation de la structure étudiée en sous-éléments appelés éléments finis. Le principe variationnel décrit à chaque instant l'équilibre énergétique en tout point de la structure. La discrétisation est une approximation qui sous-tend que la vibration globale de la structure est obtenue par composition des vibrations d'un ensemble discret de points. L'approximation est rendue nécessaire du fait que nous n'avons pas accès à une solution générale simple du problème.

Simultanément Tiersten [46, 47], Eer Nisse et Holland [48–50] ont établi une formulation variationnelle pour les structures électro-acoustiques. Allik et Hughes [40] ont les premiers appliqué la méthode des éléments finis à un solide piézoélectrique à l'aide d'une formulation globale en déplacements et potentiel.

5.1.1 Principe de Hamilton en élasticité pure

L'étude des structures en dynamique repose sur le principe de Hamilton [51, 52] : l'intégrale du Lagrangien d'un système entre deux instants t_1 et t_2 s'appelle l'*action* ; parmi tous les chemins possibles entre ces deux instants, pour lesquels l'état du système est connu, l'action est extremum pour le chemin de l'espace qui correspond au chemin effectif. Autrement définie, l'action est l'intégrale sur le temps de l'énergie cinétique, de laquelle on a préalablement soustrait l'énergie potentielle [53].

Ce principe est similaire au principe de Fermat en optique – la lumière trouve la trajectoire, dans un système optique, pour laquelle le parcours prend le moins de temps possible. Il est lié à l'idée que, lors du passage d'un état à un autre, un système dépense le moins d'énergie possible.

A partir de l'énergie cinétique K et de l'énergie potentielle U , il est possible de construire une quantité appelée *Hamiltonien* (combinaison symétrique) ou *Lagrangien* (combinaison antisymétrique). L'Hamiltonien conduit à l'établissement des lois de conservation tandis que le Lagrangien mène aux équations du comportement dynamique.

On suppose le mouvement d'un système élastique conservatif continu entre deux instants (t_1 et t_2), de telle sorte que la fonctionnelle $J[u_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(u_i)dt$ soit stationnaire, autrement dit que sa première variation soit nulle [54] :

$$\delta J = \epsilon \left(\frac{d}{d\epsilon} J[u_i + \epsilon \eta_i] \right)_{\epsilon=0} = 0, \quad \forall \eta_i, \quad (5.1)$$

où L représente le Lagrangien total du système.

On construit les fonctions $\tilde{u}_i = u_i + \epsilon \eta_i(x_j) = u_i + \delta u_i$ où ϵ est un paramètre et les δu_i représentent un accroissement virtuel des déplacements. Les déplacements résultants \tilde{u}_i suivent les variations δu_i dans l'intervalle (t_1, t_2) et sont présumés connus aux instants t_1 et t_2 (conditions initiales et finales) de telle sorte que : $\delta u_i(t_1) = \delta u_i(t_2) = 0$.

Le Lagrangien total L s'écrit :

$$L = \int_{\Omega} \mathcal{L} dV + W = \int_{\Omega} (K - U) dV + W, \quad (5.2)$$

où K et U sont respectivement les densités d'énergie cinétique et d'énergie potentielle (ou énergie de déformation), et W le potentiel des forces conservatives de volume et de surface.

Dans le cas de champs réels, K , U et W sont donnés par :

$$K = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2, \quad (5.3)$$

$$U = \frac{1}{2} T_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (5.4)$$

et

$$W = \int_{\Omega} f_i^{\Omega} u_i dV + \int_{\Gamma} f_i^{\Gamma} u_i dS. \quad (5.5)$$

Après calculs, la première variation de la fonctionnelle $J[u_i]$ s'écrit :

$$\delta J = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \eta_i}{\partial t} dV - \int_{\Omega} c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} dV + \int_{\Omega} f_i^{\Omega} \eta_i dV + \int_{\Gamma} f_i^{\Gamma} \eta_i dS \right] dt \quad (5.6)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} dV - \int_{\Omega} c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV + \int_{\Omega} f_i^{\Omega} \delta u_i dV + \int_{\Gamma} f_i^{\Gamma} \delta u_i dS \right] dt. \quad (5.7)$$

Par intégration par parties respectivement par rapport à t et x_j , on a :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} dV dt &= \int_{\Omega} \left[\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \delta u_i \right]_{t_1}^{t_2} dV - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV dt, \end{aligned} \quad (5.8)$$

car les variations δu_i sont supposées nulles aux instants t_1 et t_2 , et

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Gamma} c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} n_j \delta u_i dS - \int_{\Omega} c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_j \partial x_l} \delta u_i dV \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Gamma} T_{ij} n_j \delta u_i dS - \int_{\Omega} T_{ij,j} \delta u_i dV \right] dt, \end{aligned} \quad (5.9)$$

et (5.1) devient :

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega} \left(-\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + T_{ij,j} + f_i^{\Omega} \right) \delta u_i dV + \int_{\Gamma} (f_i^{\Gamma} - T_{ij} n_j) \delta u_i dS \right] dt = 0. \quad (5.10)$$

La nullité de δJ quelque soit l'accroissement virtuel δu_i entraîne :

- dans Ω : $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = T_{ij,j} + f_i^{\Omega}$ (equations du mouvement),
- sur Γ : $T_{ij} n_j = f_i^{\Gamma}$ (conditions aux limites sur les contraintes), ou alors u_i est imposé et δu_i est nul.

5.1.2 Cas de la piézo-électricité

Dans le cas piézo-électrique, on veut établir une formulation en déplacements et potentiel. On remplace donc dans le Lagrangien (5.2) la densité d'énergie potentielle U par la densité d'enthalpie électrique H [47], autre potentiel thermodynamique tel que les variables indépendantes sont S_{ij} et E_i (voir Section 4.2.5), et le Lagrangien devient :

$$L = \int_{\Omega} \mathcal{L} dV + W_{meca} + W_{elec} = \int_{\Omega} (K - H) dV + W_{meca} + W_{elec}, \quad (5.11)$$

où W_{meca} et W_{elec} représentent l'énergie apportée par les sources d'excitation mécanique et électrique extérieures ainsi que le potentiel des forces de volume.

La densité d'enthalpie électrique est définie par :

$$H = U - E_i D_i, \quad (5.12)$$

avec dans ce cas U la densité d'énergie potentielle totale (énergie stockée par unité de volume) telle que :

$$U = \frac{1}{2} T_{ij} S_{ij} + \frac{1}{2} E_j D_j. \quad (5.13)$$

Finalement H s'écrit comme une forme quadratique des déformations et du champ électrique :

$$H(S_{ij}, E_i) = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{jkl} E_j S_{kl} - \frac{1}{2} \varepsilon_{jl}^S E_j E_l, \quad (5.14)$$

$$H(u_i, \phi) = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + e_{jkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \varepsilon_{jl}^S \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_l}. \quad (5.15)$$

La condition de stationnarité (5.1) de la fonctionnelle devient après calculs :

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \left[- \int_{\Omega} \underbrace{\left(\delta u_{i,j} c_{ijkl}^E u_{k,l} + \delta u_{i,j} e_{lij} \phi_{,l} + \delta \phi_{,j} e_{jkl} u_{k,l} - \delta \phi_{,j} \varepsilon_{jl}^S \phi_{,l} \right)}_{\delta H} - \underbrace{\delta \dot{u}_i \rho \ddot{u}_i}_{\delta K} \right] dV \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} \delta u_i f_i^{\Omega} dV}_{\delta W_{meca}} + \underbrace{\int_{\Gamma} \delta u_i f_i^{\Gamma} dS - \int_{\Gamma} \delta \phi q dS}_{\delta W_{elec}} \Big] dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

En effectuant l'intégration par partie (5.8), elle s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \left[- \int_{\Omega} \underbrace{\left(\delta u_{i,j} c_{ijkl}^E u_{k,l} + \delta u_{i,j} e_{lij} \phi_{,l} + \delta \phi_{,j} e_{jkl} u_{k,l} - \delta \phi_{,j} \varepsilon_{jl}^S \phi_{,l} \right)}_{\delta H} + \underbrace{\delta u_i \rho \ddot{u}_i}_{\delta K} \right] dV \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} \delta u_i f_i^{\Omega} dV}_{\delta W_{meca}} + \underbrace{\int_{\Gamma} \delta u_i f_i^{\Gamma} dS - \int_{\Gamma} \delta \phi q dS}_{\delta W_{elec}} \Big] dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Remarque : Les termes de la densité "Lagrangienne" \mathcal{L} dans le cas de l'électromagnétisme ne peuvent généralement pas être identifiés simplement en tant que densités d'énergie potentielle ou cinétique. La définition simple donnée dans le cas de l'élasticité pure ne suffit pas. On prouve que la densité Lagrangienne définie par $\mathcal{L} = K - H$ est appropriée au cas piézoélectrique, en calculant les équations d'Euler-Lagrange [48, 54] définies par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial u_i}{\partial t})} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial u_i}{\partial x_j})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0, \quad (i = 1, 3), \quad (5.18)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial t})} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial x_j})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (5.19)$$

et qui redonnent les équations de Newton et de Poisson.

La densité d'énergie totale \mathcal{H} (densité "Hamiltonienne") est déduite de \mathcal{L} par :

$$\mathcal{H} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial u_i}{\partial t})} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial t})} \right) - \mathcal{L}, \quad (5.20)$$

d'où :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(c_{ijkl}^E \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + e_{lij} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \left(e_{jkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \varepsilon_{jl}^S \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \right). \quad (5.21)$$

En utilisant l'équation de Poisson (divergence de D_i nulle) on peut réécrire \mathcal{H} sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(c_{ijkl}^E \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + e_{lij} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \left(e_{jkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \varepsilon_{jl}^S \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\phi \left(e_{jkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \varepsilon_{jl}^S \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$= \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} S_{ij} T_{ij} + \frac{1}{2} E_j D_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi D_j). \quad (5.23)$$

L'intégrale sur le volume du dernier terme s'écrit aussi $\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi D_j) dV = \int_{\Gamma} \phi D_j n_j dS$, soit une intégrale sur la frontière qui s'annule. Ainsi l'intégrale de \mathcal{H} sur le volume résulte en la somme des énergies cinétiques et potentielles et \mathcal{H} exprime effectivement une densité d'énergie. Notons que l'on peut réécrire \mathcal{L} sous la forme :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} S_{ij} T_{ij} + \frac{1}{2} E_j D_j \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi D_j), \quad (5.24)$$

qui fait intervenir l'énergie cinétique moins l'énergie potentielle moins une quantité qui s'annule en s'intégrant.

On se reportera avantageusement à la publication de Lee [55] qui montre comment, à partir de la formulation variationnelle choisie, aboutir aux équations du piézoélectromagnétisme pour un cristal diélectrique dans le vide, et aux conditions aux limites adéquates.

5.1.3 Discrétisation

Dans la méthode des éléments finis, le domaine Ω est découpé en sous-domaines finis Ω^e appelés éléments tel que : $\Omega = \cup_e \Omega^e$. L'intégrale sur le domaine est alors : $\int_{\Omega} = \sum_e \int_{\Omega^e}$. Ces éléments sont connectés en certains points appelés nœuds. En un point du domaine Ω , tout champ h est donné par les valeurs du même champ $h^{i(e)}$ aux nœuds i de l'élément e auquel le point appartient. La valeur de h est reliée aux valeurs nodales $h^{i(e)}$ par des fonctions d'interpolation telles que :

$$h(x_j) = \sum_i N_i^{(e)}(x_j) h^{i(e)} = \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{h}^{(e)}. \quad (5.25)$$

Les éléments finis doivent respecter certaines conditions pour permettre la convergence de la méthode. Elles se déduisent des conditions de convergence de la méthode de Ritz, que sont la *complétude* et la *compatibilité* [51]. Un élément est dit complet si l'approximation de la solution dans l'élément permet de représenter à la limite (quand on diminue la taille de l'élément) n'importe quelle valeur de la solution et de ses dérivées présentes dans la fonctionnelle considérée (ici le Lagrangien). En particulier on peut en déduire

deux critères que sont la représentation des modes rigides (état de déformation nulle pour un mouvement d'ensemble) et celle des états de déformation constante. Un élément est dit compatible lorsque le champ défini dessus présente une continuité suffisante par rapport au problème traité (\mathcal{C}^0 , i.e. déplacements continus, pour un problème d'élasticité pur et \mathcal{C}^1 , i.e. déplacements et dérivées premières continus, pour un problème de flexion).

Afin de faciliter la construction d'un problème, on a recours aux *éléments de référence* définis par leurs coordonnées intrinsèques (ou naturelles). Ces éléments de référence permettent de construire plus facilement les fonctions d'interpolation et de calculer aussi plus facilement les intégrales élémentaires \int_{Ω_e} . Les coordonnées physiques (réelles) d'un élément s'obtiennent par une deuxième interpolation dite *interpolation géométrique* (par opposition à l'*interpolation physique* des champs décrite précédemment) :

$$x_j = \sum_i \bar{N}_i^{(e)}(r_k) x_j^{i(e)}, \quad (5.26)$$

où r_k sont les coordonnées de l'élément de référence. L'interpolation physique se fait alors sur l'élément de référence :

$$h(r_k) = \sum_i N_i^{(e)}(r_k) h^{i(e)}. \quad (5.27)$$

Notons qu'un élément est dit *isoparamétrique* si ses polynômes d'interpolations géométrique et physique sont les mêmes.

On calcule ensuite les intégrales sur chaque élément en faisant intervenir les différentes interpolations ainsi que le Jacobien de la transformation géométrique. La construction du système globale s'effectue ensuite par *assemblage* des matrices et seconds membres élémentaires.

Après discrétisation et interpolation nodale, la relation de stationarité (5.17) devient :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathbf{u}^T \delta \phi^T) \left(\begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \right) dt = 0, \quad (5.28)$$

pour tout $(\delta \mathbf{u}^T \delta \phi^T)$, où \mathbf{u} est le vecteur des déplacements nodaux et ϕ le vecteur des potentiels nodaux. M_{uu} est la matrice de masse, K_{uu} la matrice de rigidité mécanique, $K_{u\phi}$ la matrice de couplage piézo-électrique et $K_{\phi\phi}$ la matrice de rigidité diélectrique. \mathbf{F} est le vecteur des forces appliquées nodales et \mathbf{Q} le vecteur des charges électriques nodales.

On passe ensuite en régime harmonique qui permet d'écrire : $\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{u}$. On écrit les inconnues variationnelles sous forme complexe afin de pouvoir ajouter une partie imaginaire aux constantes mécaniques et diélectriques pour prendre en compte les pertes intrinsèques des matériaux [56]. On prendra par exemple : $c_{IJ}^E = c_{IJ}^{E(\text{fournisseur})} (1 + j \frac{1}{Q})$ et $\varepsilon_{ij}^S = \varepsilon_{ij}^{S(\text{fournisseur})} (1 + j \tan \delta)$, où Q est le facteur de qualité mécanique et $\tan \delta$ est la tangente de l'angle de pertes diélectriques. La relation de stationarité devient :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\overline{\delta \mathbf{u}^T} \overline{\delta \phi^T}) \left(\begin{bmatrix} K_{uu} - \omega^2 M_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \right) dt = 0, \quad \forall (\delta \mathbf{u}^T \delta \phi^T). \quad (5.29)$$

Finalement, on obtient le système discret :

$$\begin{bmatrix} K_{uu} - \omega^2 M_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

La matrice est de type bande complexe symétrique.

5.2 Etapes de la résolution

La construction du problème et la résolution s'effectuent donc en plusieurs étapes :

- création du maillage qui définit la subdivision de la structure en sous-éléments, et entrée des propriétés des matériaux qui composent la structure,
- calcul des matrices élémentaires et des seconds membres élémentaires pour chaque élément,
- assemblage des matrices globales et du second membre,
- prise en compte des conditions aux limites : dans le cas d'une excitation en tension, on fixe le potentiel aux nœuds des électrodes,
- résolution du système global (5.30) avec la charge supposée nulle au second membre ; on calcule le vecteur solution (\mathbf{u}^T, ϕ^T) ,
- à partir du vecteur solution, on calcule le second membre, dont la charge sur les électrodes, résultante de la vibration engendrée par l'excitation. L'admittance $Y = I/V = j \omega Q/V$ est obtenue en sommant la densité de charge en chaque nœud de l'électrode considérée.

5.3 Conditions de périodicité

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse principalement aux sondes ultrasonores, soit à des structures périodiques dont le réseau est unidimensionnel ou bidimensionnel. Ce travail peut bien sûr être étendu au cas tridimensionnel [31] (périodique suivant trois directions), qui ne concerne pas notre champ d'application.

5.3.1 Théorème de Bloch-Floquet appliqué aux réseaux bidimensionnels

On considère le cas général où le matériau est périodique selon deux directions de l'espace contenues dans le plan normal à l'émission, et soumis à une vibration de vecteur d'onde \mathbf{k} . D'après le théorème de Bloch-Floquet [33], tout champ $h(\mathbf{r}, t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$h(\mathbf{r}, t) = H(\mathbf{r}) \exp(j\omega t) = H^p(\mathbf{r}) \exp(-j\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}) \exp(j\omega t), \quad (5.31)$$

où $H^p(\mathbf{r})$ est une fonction doublement périodique de l'espace et \mathbf{k}_{\parallel} est la composante du vecteur d'onde contenue dans le plan normal de l'émission. Autrement écrit :

$$H(\mathbf{r} + m\mathbf{a} + n\mathbf{b}) = H(\mathbf{r}) \exp(-j(m\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{a} + n\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{b})), \quad (5.32)$$

où \mathbf{a} et \mathbf{b} sont les vecteurs de base du réseau.

Dans la suite on suppose les champs monochromatiques. La dépendance en $\exp(j\omega t)$ est implicite, ce qui revient à se placer dans l'espace réciproque vis-à-vis du temps.

On suppose une sonde constituée d'un réseau de transducteurs élémentaires. La cellule élémentaire est représentée sur la figure 5.1.

On applique comme condition aux limites une excitation extérieure spécifique (effort mécanique ou potentiel électrique), appelée excitation harmonique (dans le domaine spatial), qui s'écrit :

$$\phi_{m,n} = \phi_0 \exp(-j2\pi(m\gamma_1 + n\gamma_2)). \quad (5.33)$$

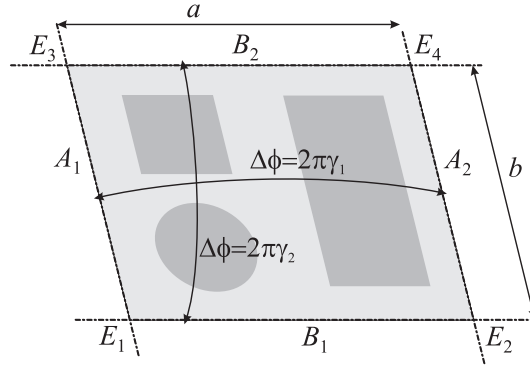


FIG. 5.1 – Géométrie schématisée d'une cellule élémentaire d'un réseau 2D.

La phase de l'excitation varie linéairement dans l'espace avec m et n . La cellule élémentaire (m, n) est excitée par une force ou un potentiel d'amplitude ϕ_0 modulé par une phase proportionnelle à sa distance par rapport à la cellule $(0, 0)$. γ_1 et γ_2 sont appelés paramètres d'excitation.

La relation (5.32) impose la définition de conditions aux limites spécifiques aux frontières de la cellule élémentaire. Ces conditions aux limites dites *conditions de périodicité* impliquent directement tous les degrés de liberté sur les frontières. Elles s'écrivent pour tout degré de liberté u [32] :

$$u_{A_2} = u_{A_1} \exp(-j2\pi\gamma_1), \quad (5.34)$$

$$u_{B_2} = u_{B_1} \exp(-j2\pi\gamma_2), \quad (5.35)$$

$$u_{E_2} = u_{E_1} \exp(-j2\pi\gamma_1), \quad (5.36)$$

$$u_{E_3} = u_{E_1} \exp(-j2\pi\gamma_2), \quad (5.37)$$

$$u_{E_4} = u_{E_1} \exp(-j2\pi(\gamma_1 + \gamma_2)), \quad (5.38)$$

où les indices E_i sont relatifs aux coins de la cellule et les A_i et B_i aux côtés, coins exclus. Alors que les côtés sont traités par paire de façon indépendante, il n'en va pas de même pour les coins. Le choix de traiter les coins E_2 , E_3 et E_4 par rapport au seul coin E_1 est purement arbitraire et n'a que le souci de conserver une certaine logique. Si on fait un parallèle avec la cristallographie, chaque nœud est commun à quatre cellules du réseau et compte donc pour $\frac{1}{4}$. On peut alors considérer qu'on a un nœud effectif par cellule ($4 \times \frac{1}{4}$). Si on considère la cellule comme l'ensemble composé du volume intérieur, des côtés A_1 et B_1 , et du coin E_1 , les autres côtés et coins sont obtenus par translations des vecteurs de base \mathbf{a} , \mathbf{b} et de leur composition $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, comme illustré sur la figure 5.2. Les conditions de périodicité ont été construites en suivant cette logique.

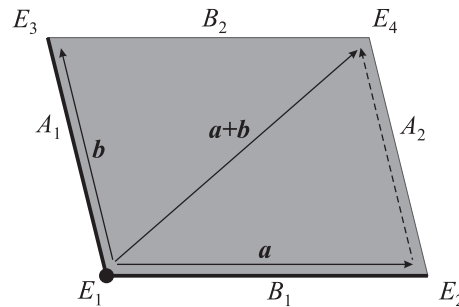


FIG. 5.2 – Description de la cellule consistant en son volume intérieur, un nœud et deux côtés effectifs.

5.3.2 Cas de la cellule hexagonale

Contrairement aux apparences, le réseau dit "hexagonal" ne présente pas trois périodicités mais bien deux. Il n'est qu'un cas particulier de ce qu'on a vu précédemment. On utilise une autre façon de construire la cellule élémentaire à partir des vecteurs de base, comme le montre la figure 5.3.

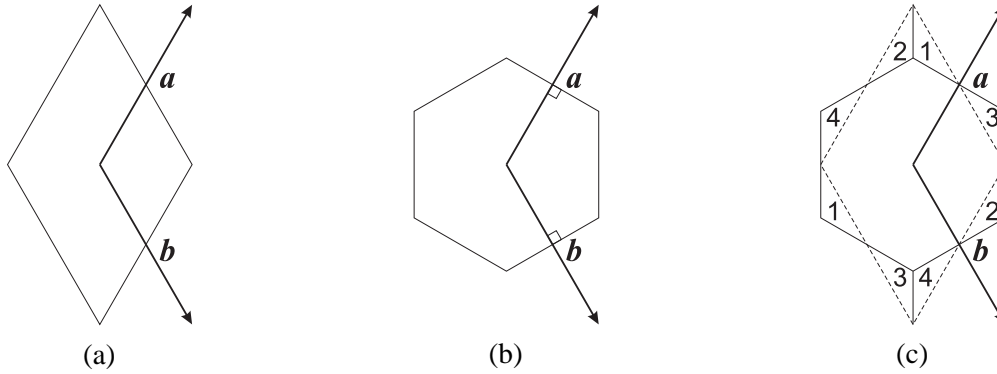


FIG. 5.3 – Deux constructions différentes de la cellule élémentaire à partir des mêmes vecteurs de base du réseau : parallélogramme (a) ou hexagone (b). Les deux constructions représentent au final le même réseau (c).

Adopter cette construction peut s'avérer préférable pour certaines applications, en particulier quand les cellules de la sonde sont effectivement hexagonales. Elle nécessite néanmoins quelques aménagements des conditions de périodicité. Pour la cellule élémentaire de la figure 5.4, elles deviennent :

$$u_{A_2} = u_{A_1} \exp(-j2\pi\gamma_1), \quad (5.39)$$

$$u_{B_2} = u_{B_1} \exp(-j2\pi\gamma_2), \quad (5.40)$$

$$u_{C_2} = u_{C_1} \exp(-j2\pi(\gamma_1 + \gamma_2)), \quad (5.41)$$

$$u_{E_2} = u_{E_1} \exp(-j2\pi\gamma_1), \quad (5.42)$$

$$u_{E_4} = u_{E_1} \exp(-j2\pi(\gamma_1 + \gamma_2)), \quad (5.43)$$

$$u_{F_3} = u_{F_1} \exp(-j2\pi\gamma_2), \quad (5.44)$$

$$u_{F_4} = u_{F_1} \exp(-j2\pi(\gamma_1 + \gamma_2)). \quad (5.45)$$

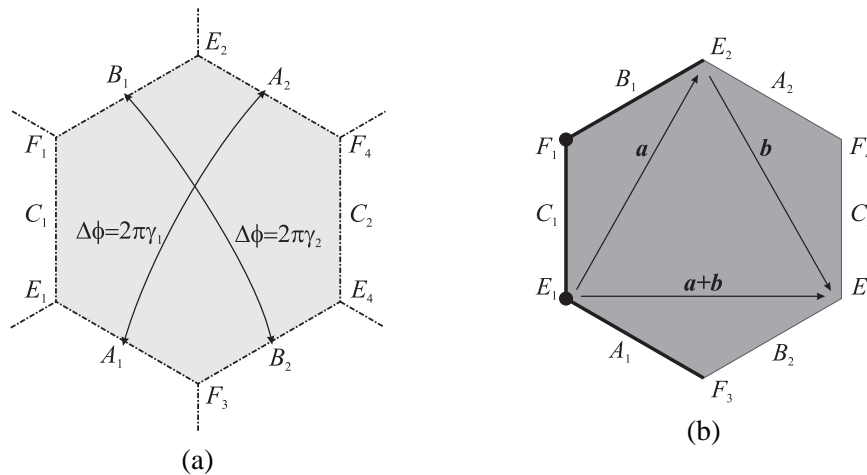


FIG. 5.4 – Géométrie schématique d'une cellule élémentaire d'un réseau hexagonal.

De même que précédemment, on peut déterminer un nombre effectif de nœuds et de côtés qui composent

la cellule. Chaque nœud est commun à trois cellules du réseau. La cellule hexagonale comporte $6 \times \frac{1}{3} = 2$ nœuds et 3 côtés effectifs. A partir des côtés A_1 , B_1 et C_1 , on construit A_2 , B_2 et C_2 par translations de vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ respectivement. A partir du nœud E_1 , on construit E_2 et E_4 par translations de vecteurs \mathbf{a} et $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. On choisit pour deuxième nœud effectif F_1 , commun aux côtés B_1 et C_1 , et on obtient F_3 et F_4 par translations de vecteurs \mathbf{b} et $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. La numérotation des coins (absence de E_3 et F_2) permet de garder une certaine compatibilité avec les conditions de périodicité de la cellule de type parallélogramme.

5.3.3 Traitement des conditions de périodicité

Les conditions de périodicité s'écrivent sous la forme de conditions aux limites de type relations linéaires (CLRL). Dans un premier temps, une structure "trouée au coin" a été utilisée pour tester ces conditions. Dans ce cas, seules interviennent les relations (5.34) et (5.35). Le cas d'une cellule complète (prise en compte de coins) s'est révélé moins trivial. Le traitement des coins a donc nécessité d'approfondir nos connaissances sur le traitement des CLRL au sein de la bibliothèque Modulef.

Spécificités de la bibliothèque d'éléments finis Modulef

On expose ici le cas général pour l'appliquer ensuite aux relations (5.34) à (5.38). Soit à considérer une relation linéaire entre plusieurs degrés de liberté p^i du type :

$$\sum_i \alpha_i p^i = \beta. \quad (5.46)$$

Le degré de liberté dont le coefficient α_k est le maximum en module est choisi comme pivot. Si plusieurs degrés de liberté ont des coefficients de même module, le premier coefficient dans la relation linéaire est choisi. Soit p^k le degré de liberté choisi comme pivot, un changement de variables est effectué tel que :

$$\begin{cases} q^j = p^j & \text{pour } j \neq k, \\ q^k = \sum_i \alpha_i p^i. \end{cases} \quad (5.47)$$

Le système est alors résolu pour les nouveaux degrés de liberté q^i . La CLRL est remplacée par une condition de type Dirichlet (blocage) puisque :

$$q^k = \beta. \quad (5.48)$$

Réciproquement le changement de variables s'écrit :

$$\begin{cases} p^j = q^j & \text{pour } j \neq k, \\ p^k = \frac{1}{\alpha_k} \left(q^k - \sum_{i \neq k} \alpha_i q^i \right). \end{cases} \quad (5.49)$$

La bibliothèque présente une limite d'utilisation quand un même degré de liberté apparaît dans plusieurs CLRL. Un même degré de liberté ne peut en effet être pivot que d'une relation linéaire. L'écriture des conditions de périodicité comme on l'a faite précédemment permet d'éviter cet écueil.

Application aux conditions de périodicité

D'après ce qui précède, si on choisit le jeu d'équations (5.36) à (5.38) pour traiter les coins, les degrés de liberté à la référence E_1 ne doivent pas être pris comme pivots dans le changement de variables. Cela

nécessite donc de prendre des précautions dans la programmation des relations linéaires, notamment au regard de la procédure de choix automatique du pivot. Le changement de variables s'écrit :

$$\begin{cases} v_{E_1} &= u_{E_1} \\ v_{E_2} &= u_{E_2} - u_{E_1} \exp(-j2\pi\gamma_1) \\ v_{E_3} &= u_{E_3} - u_{E_1} \exp(-j2\pi\gamma_2) \\ v_{E_4} &= u_{E_4} - u_{E_1} \exp(-j2\pi(\gamma_1 + \gamma_2)) \end{cases} \quad (5.50)$$

Si on note \mathbf{u}_R le vecteur des degrés de liberté à une référence R donnée et I_R la matrice identité de même taille :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{E_1} \\ \mathbf{u}_{E_2} \\ \mathbf{u}_{E_3} \\ \mathbf{u}_{E_4} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_E & 0 \\ e^{-j2\pi\gamma_1} I_E & I_E \\ e^{-j2\pi\gamma_2} I_E & 0 & I_E \\ e^{-j2\pi(\gamma_1+\gamma_2)} I_E & 0 & 0 & I_E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{E_1} \\ \mathbf{v}_{E_2} \\ \mathbf{v}_{E_3} \\ \mathbf{v}_{E_4} \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

On note I_E pour I_{E_1} , I_{E_2} , etc. de même que I_A pour I_{A_1} et I_{A_2} et que I_B . En effet, le respect scrupuleux des conditions de périodicité implique que les nœuds de deux références en relation soient répartis en vis-à-vis à l'identique, autrement dit les nombres des degrés de liberté sur deux références en relation sont strictement égaux. Avec \mathbf{u}_Ω le vecteur des degrés de liberté interne au domaine, on a pour le système global :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{A_1} \\ \mathbf{u}_{A_2} \\ \mathbf{u}_{B_1} \\ \mathbf{u}_{B_2} \\ \mathbf{u}_{E_1} \\ \mathbf{u}_{E_2} \\ \mathbf{u}_{E_3} \\ \mathbf{u}_{E_4} \\ \mathbf{u}_\Omega \end{pmatrix} = [C] \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{A_1} \\ \mathbf{v}_{A_2} \\ \mathbf{v}_{B_1} \\ \mathbf{v}_{B_2} \\ \mathbf{v}_{E_1} \\ \mathbf{v}_{E_2} \\ \mathbf{v}_{E_3} \\ \mathbf{v}_{E_4} \\ \mathbf{v}_\Omega \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

avec :

$$[C] = \begin{bmatrix} I_A & & & & & & & & \\ e^{-j2\pi\gamma_1} I_A & I_A & & & & & & & \\ 0 & 0 & I_B & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j2\pi\gamma_2} I_B & I_B & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_E & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-j2\pi\gamma_1} I_E & I_E & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-j2\pi\gamma_2} I_E & 0 & I_E & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-j2\pi(\gamma_1+\gamma_2)} I_E & 0 & 0 & I_E & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_\Omega \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Le système discret (5.30) devient avec les nouvelles inconnues :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{C_{v \rightarrow u}} & 0 \\ 0 & \overline{C_{\varphi \rightarrow \phi}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{uu} - \omega^2 M_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{v \rightarrow u} & 0 \\ 0 & C_{\varphi \rightarrow \phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \varphi \end{pmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \overline{C_{v \rightarrow u}} & 0 \\ 0 & \overline{C_{\varphi \rightarrow \phi}} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} F \\ Q \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (5.54)$$

En effet, l'application des conditions de périodicité se fait à la fois sur les degrés de liberté u et ϕ et sur leurs variations δu et $\delta \phi$, à partir de l'équation (5.29).

A la construction du problème initial, le système obtenu est de type bande [51] complexe symétrique. A cause de la mise en relation de nœuds aux antipodes du maillage, la bande est élargie de manière plus ou moins significative suivant la forme de la cellule élémentaire du problème étudié. De plus, le système perd sa symétrie et devient complexe général. Un nouvel algorithme, adapté à la résolution de systèmes linéaires de type complexes, non-symétriques et creux, a été utilisé pour traiter le problème périodique [57].

Notons que l'assemblage des matrices élémentaires tient compte des conditions aux limites de type relation linéaire pour organiser le système discret. L'assemblage doit être effectué après chaque mise à jour des conditions de périodicité.

5.3.4 Premiers résultats

On prend comme structure de test un composite 1-3 de période $200 \mu\text{m}$ et de hauteur $300 \mu\text{m}$. La largeur des barreaux de PZT est fixée à $100 \mu\text{m}$, soit une fraction volumique de céramique de 25%. Dans ces premiers calculs de validation de l'approche, le paramètre d'excitation γ_1 varie de 0 à 0,5 pendant que le paramètre d'excitation γ_2 reste fixé à 0. D'autrepart les éléments utilisés sont linéaires.

L'admittance harmonique est tracée sur la figure 5.5. On identifie facilement le premier mode de Lamb symétrique (mode longitudinal suivant x_1) dans la gamme de fréquences 0 kHz–3,5 MHz pour γ_1 égal à 0 et 0,5 respectivement. Notons que celui-ci n'est pas couplé pour γ_1 égal à 0 et 0,5. Le mode d'épaisseur est trouvé autour de 4,58 MHz pour une fréquence d'antirésonance de l'ordre de 5,08 MHz. Le couplage K , donné par l'équation (4.5), est de l'ordre de 0,47. Enfin, on trouve autour de 6,8 MHz le premier mode latéral, couplé pour γ_1 inférieur à 0,3, et que l'on a évoqué dans la section 2.4.5. Les autres modes sont analysés dans la section 7.2.

Le modèle de Smith et Auld [21] donne, pour la même géométrie dans le plan et les mêmes constantes des matériaux, une vitesse de phase de $3169,6 \text{ m.s}^{-1}$, soit une fréquence d'antirésonance f_a de 5,283 MHz, et un couplage K égal à 0,452. La différence de l'ordre de 4 % sur f_a et K peut trouver son origine dans le rapport période/hauteur du composite, qui nous placerait en limite de validité du modèle de Smith et Auld. Le comportement du mode de compression longitudinal d'un composite 1-3 suivant l'axe des barreaux est décrit dans la section 7.2.2. D'autre part, on a utilisé ici une interpolation linéaire (éléments de degré 1) avec un nombre d'éléments limité par les moyens de calcul disponibles au début de ces travaux. Par la suite, on utilisera des éléments de degré 2 en s'attachant à respecter les critères de convergence sur le maillage. Ce passage à l'interpolation d'ordre 2 a été rendu possible grâce aux progrès du matériel informatique et à l'utilisation d'algorithmes de résolution optimisés.

Pour finir avec ce premier exemple, on reporte les déformées du mode d'épaisseur et du premier mode latéral sur la figure 5.6 pour γ_1 et γ_2 nuls, autrement dit quand l'ensemble du réseau est excité de façon synchrone.

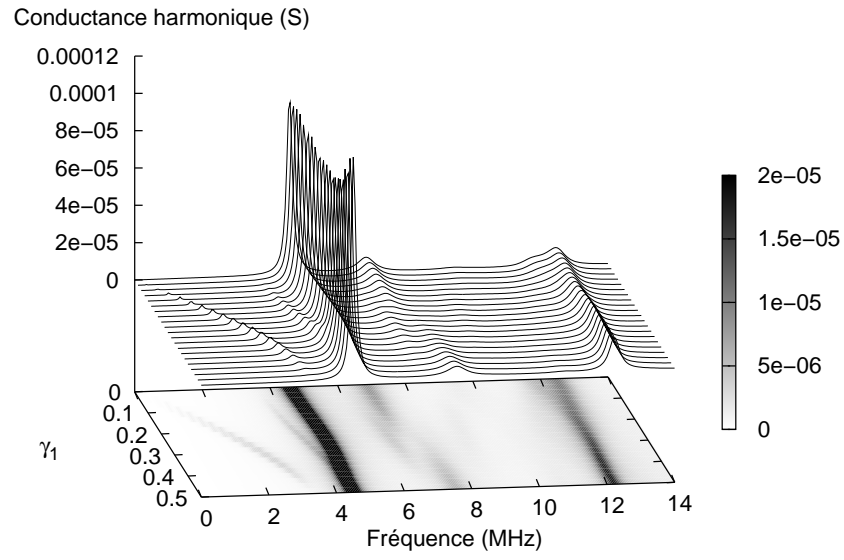


FIG. 5.5 – Conductance harmonique de la structure de test pour γ_2 fixé à 0.

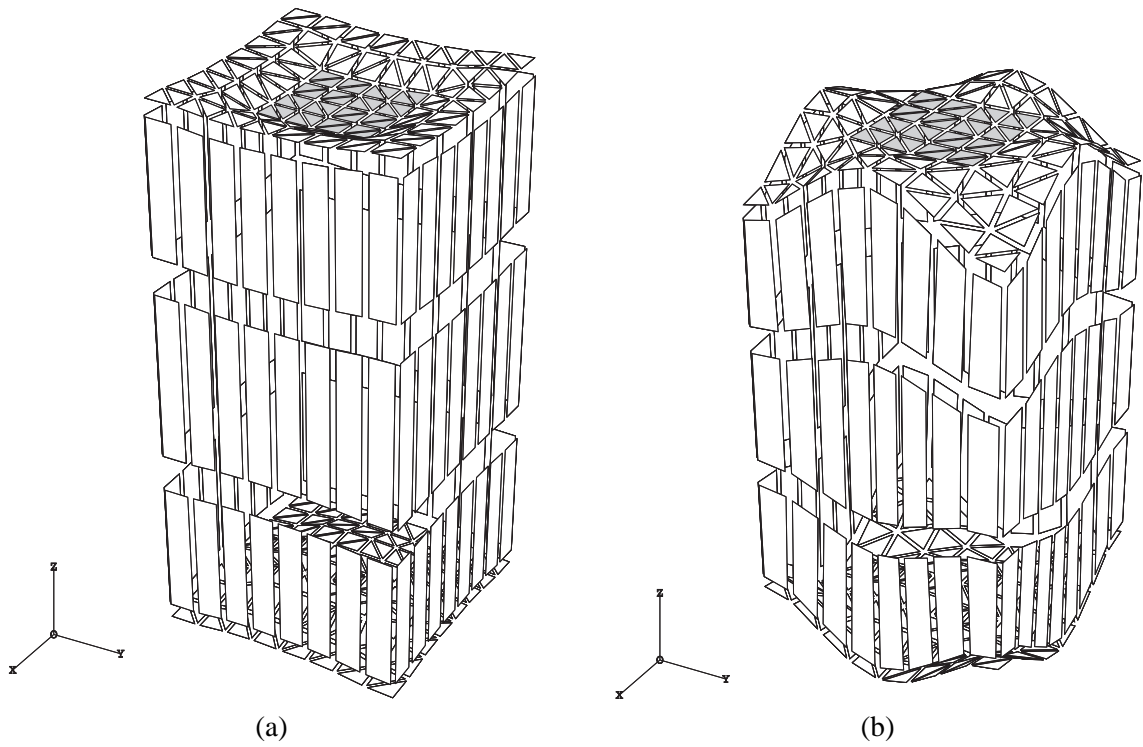


FIG. 5.6 – Déformée du mode d'épaisseur (a) et du premier mode latéral (b) pour γ_1 et γ_2 nuls.

Enfin, on illustre le cas de la cellule hexagonale avec un composite composé de cylindres de PZT disposés en quinconce et enrobés d'une résine. On reporte sur la figure 5.7 les déformées du mode d'épaisseur pour γ_1 égal à 0 et à 0,5 respectivement avec γ_2 toujours égal à 0.

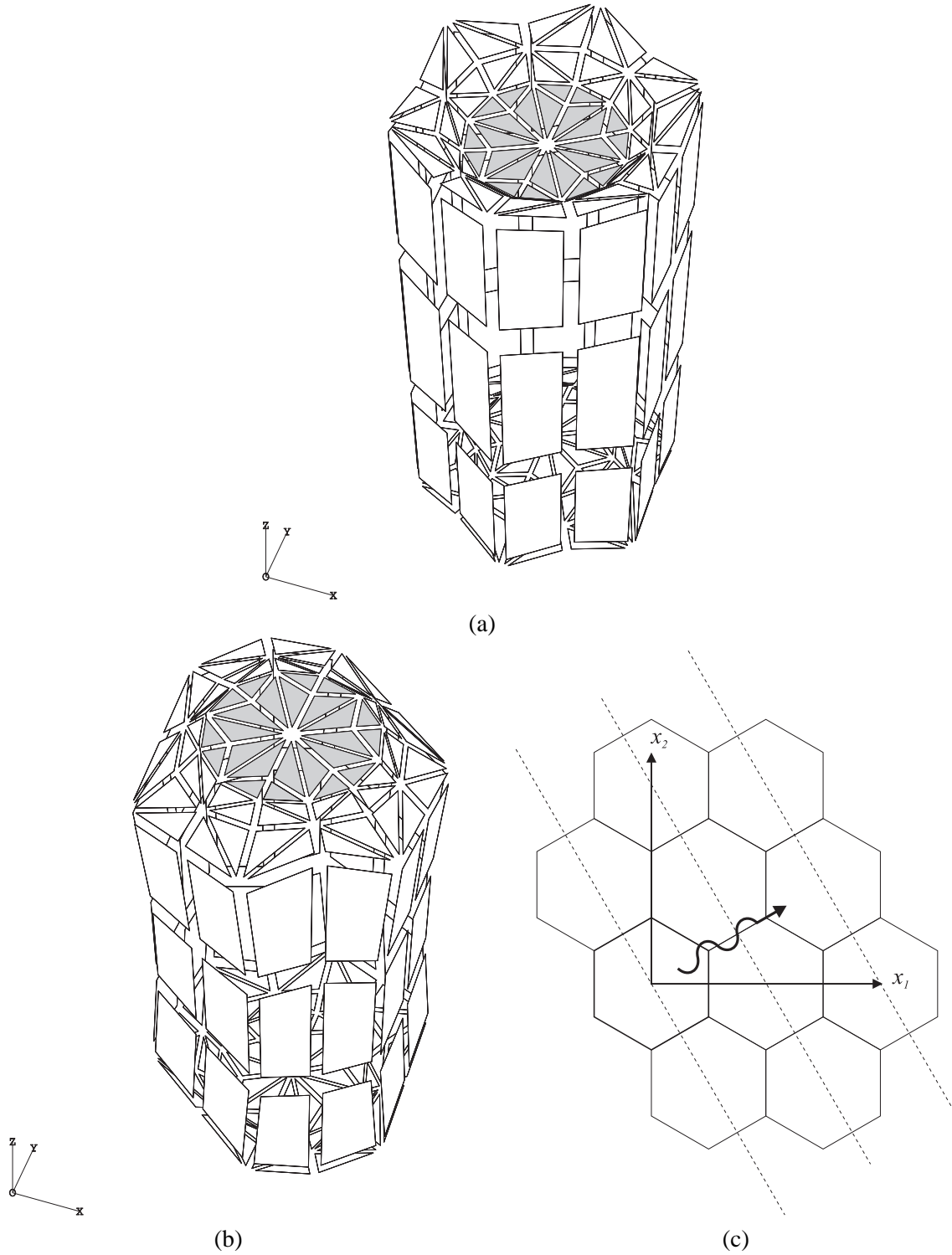


FIG. 5.7 – Déformée du mode d'épaisseur pour γ_1 nul (a) et γ_1 égal à 0,5 (b) avec γ_2 nul dans les deux cas. (c) Direction de propagation de l'onde et lignes des ventres de vibration dans le cas (b).

5.4 Rayonnement des structures périodiques

Avant d'entrer dans le détail de la méthode éléments finis/éléments de frontière (encore connue en anglais sous l'acronyme FEA/BEM), nous abordons succinctement quelques points généraux d'acoustique en milieu fluide. Le but est de fournir quelques clefs pour une meilleure compréhension sur une base bibliographique bien établie (cf Réfs. [3, 34]).

5.4.1 Rayonnement acoustique de sources ponctuelles (monopôles) en milieu fluide

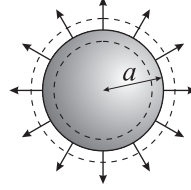


FIG. 5.8 – Vibration d'une petite sphère de rayon a .

On considère une petite sphère dont le rayon varie sinusoidalement autour de son rayon moyen a , de vitesse normale $v_s = V_a \exp(j\omega t)$ à la surface, dont le centre est confondu avec l'origine du repère. Avec les hypothèses du monopôle (le rayon a est très petit devant la longueur d'onde λ) :

$$a \ll \lambda,$$

la pression en tout point extérieur à la sphère est donnée par [3] :

$$p(r, \omega) = \frac{\rho_f j \omega a^2 V_a}{r} \exp(j(\omega t - kr)), \quad (5.55)$$

où ρ_f est la masse volumique du fluide et k le nombre d'onde. C'est une onde de pression divergente dont l'amplitude décroît inversement avec la distance à l'origine. La décroissance en $1/r$ traduit la conservation de l'énergie, i.e. du flux de puissance.

L'équation d'Euler [34] :

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_f j \omega \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p, \quad (5.56)$$

conduit, à la surface de la sphère, avec \mathbf{n} normale intérieure à la sphère, à :

$$v_s = \frac{1}{j \omega \rho_f} \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{j \omega \rho_f} \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{r=a}.$$

En considérant une sphère de surface unité ($4\pi a^2 = 1$) il vient :

$$p(r, \omega) = \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{r=a} g(r), \quad (5.57)$$

avec

$$g(r) = \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r}. \quad (5.58)$$

La pression en tout point du champ, due à une source ponctuelle en milieu fluide infini, est donc proportionnelle à g et à $\partial p / \partial n$ pris sur la surface. La fonction g est appelée fonction de Green en espace infini.

5.4.2 Le problème fluide/structure

Comme on l'a fait précédemment pour l'analyse par éléments finis, on restreint dans un premier temps le problème à un solide purement élastique (non piézo-électrique) rayonnant dans un milieu fluide semi-infini.

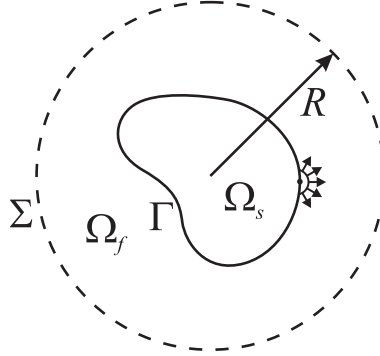


FIG. 5.9 – Solide Ω_s couplé à un milieu fluide Ω_f .

Equations du problème

Lorsqu'une structure élastique vibre dans un fluide acoustique, il y a interaction entre les ondes élastiques et acoustiques se propageant dans les deux milieux (à condition que la vibration élastique ne soit pas de polarisation de cisaillement pur). On est donc amené à résoudre simultanément les équations du mouvement de la structure et du fluide en tenant compte des conditions de couplage. Dans le cas du fluide parfait, ces dernières se traduisent par la continuité de la composante normale du déplacement et l'équilibre de pression à l'interface.

Dans le cas purement élastique, les équations du mouvement (équation fondamentale de la dynamique, loi de Hooke) s'écrivent en régime harmonique :

$$\left. \begin{aligned} -\rho_s \omega^2 u_i &= T_{ij,j} \\ T_{ij} &= c_{ijkl} u_{k,l} \end{aligned} \right\} \text{ dans le domaine solide } \Omega_s. \quad (5.59)$$

L'équation d'Helmholtz s'écrit :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans le domaine fluide } \Omega_f. \quad (5.60)$$

A cela s'ajoutent les conditions de couplage à l'interface Γ :

$$\rho_f \omega^2 u_n = \frac{\partial p}{\partial n} \quad (5.61)$$

et

$$T_{ij} n_j = -p n_i \text{ sur } \Gamma, \quad (5.62)$$

avec u_n déplacement normal à l'interface, et la condition de rayonnement dite de Sommerfeld pour un milieu semi-infini [58] :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} + jk \right) p = 0. \quad (5.63)$$

La structure est traitée par une méthode éléments finis tandis que le milieu fluide ne nécessite que la discrétisation de l'interface Γ . Pour le domaine fluide, on fait appel à une méthode d'éléments de frontière.

Les deux méthodes sont ensuite couplées pour traiter le problème complet.

Forme intégrale de la pression acoustique

On considère la structure de la figure 5.9 couplée à un fluide par une frontière Γ , et une sphère de frontière Σ centrée sur la structure et de rayon $R \rightarrow \infty$.

Soient deux points M et N appartenant au domaine fluide Ω_f . La fonction de Green $G(M, N)$ est la réponse en M à une source unitaire placée en N , respectant toutes ou certaines conditions aux limites, telle que :

$$\Delta G(M, N) + k^2 G(M, N) + \delta(M - N) = 0, \quad (5.64)$$

avec $G(M, N) = G(N, M)$,

et où $\delta(M - N)$ est la distribution de Dirac, i.e. :

$$\int_{N \in V} f(N) \delta(M - N) dv = f(M). \quad (5.65)$$

Autrement dit, la fonction de Green G est la solution fondamentale de l'équation d'Helmholtz (5.60).

Comme dans l'analyse par éléments finis, on écrit la forme intégrale de l'équation d'Helmholtz :

$$0 = \int_{N \in \Omega_f} (\Delta p(N) + k^2 p(N)) \delta p dV, \quad (5.66)$$

où δp est une fonction-test. Cela revient à réaliser une projection orthogonale de l'équation d'Helmholtz sur l'espace des fonctions-test. Cependant l'analogie aux éléments finis s'arrête là.

Afin d'obtenir une formulation intégrale de frontière, on prend pour fonction-test la fonction de Green G précédemment évoquée, soit :

$$0 = \int_{N \in \Omega_f} (\Delta p(N) + k^2 p(N)) G(M, N) dV. \quad (5.67)$$

D'après le second théorème de Green, on a :

$$\begin{aligned} \int_{N \in \Omega_f} \Delta p(N) G(M, N) dV &= \int_{N \in \Omega_f} \Delta G(M, N) p(N) dV \\ &+ \int_{N \in \Gamma \cup \Sigma} \left(\frac{\partial p(N)}{\partial n_N} G(M, N) - p(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_N} \right) dS, \end{aligned} \quad (5.68)$$

où $\partial/\partial n_N$ est la dérivée par rapport à la normale extérieure à $(\Gamma \cup \Sigma)$ en N , de vecteur unitaire \mathbf{n}_N .

De ce qui précède, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{N \in \Gamma \cup \Sigma} \left(\frac{\partial p(N)}{\partial n_N} G(M, N) - p(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_N} \right) dS \\ &+ \int_{N \in \Omega_f} p(N) (\Delta G(M, N) + k^2 G(M, N)) dV, \end{aligned} \quad (5.69)$$

soit encore :

$$0 = \int_{N \in \Gamma \cup \Sigma} \left(\frac{\partial p(N)}{\partial n_N} G(M, N) - p(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_N} \right) dS - \int_{N \in \Omega_f} p(N) \delta(N - M) dV. \quad (5.70)$$

D'autre part, la condition de Sommerfeld est vérifiée sur Σ et l'intégrale de frontière sur Σ est nulle.

En définitive, nous avons :

$$p(M) = \int_{N \in \Gamma} \left(\frac{\partial p(N)}{\partial n_N} G(M, N) - p(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_N} \right) dS, \quad M \in \Omega_f. \quad (5.71)$$

Le terme intégral à la frontière comporte donc une contribution :

– de type monopolaire :

$$\int_{N \in \Gamma} \frac{\partial p(N)}{\partial n_N} G(M, N) dS, \quad (5.72)$$

encore appelée potentiel de simple couche, de densité $\frac{\partial p(N)}{\partial n_N}$,

– de type dipolaire :

$$- \int_{N \in \Gamma} p(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_N} dS, \quad (5.73)$$

encore appelée potentiel de double couche, de densité $p(N)$.

Dans le cas du potentiel de simple couche, cela revient à dire que tout point de l'interface peut être considéré comme une source ponctuelle contribuant au rayonnement de l'ensemble de l'interface.

On se place maintenant dans l'hypothèse des petites déformations et on considère la condition aux limites mixte (5.61). On se retrouve proche du cas d'un baffle plan rigide parfaitement réfléchissant où $\partial p / \partial n = 0$ à la frontière. Il est alors opportun de choisir G telle que $\frac{\partial G}{\partial n_N} = 0$ et il reste finalement un seul terme de l'intégrale (5.71) :

$$p(M) = \int_{N \in \Gamma} \frac{\partial p(N)}{\partial n_N} G(M, N) dS, \quad M \in \Omega_f, \quad (5.74)$$

soit encore :

$$p(M) = \int_{\Gamma} \rho_f \omega^2 u_n(N) G(M, N) dS, \quad M \in \Omega_f. \quad (5.75)$$

Cette dernière équation est une approximation de la solution exacte, justifiée dans le cadre des petites déformations. Ce choix des conditions aux limites sur G explique la définition de G comme "respectant toutes ou certaines conditions aux limites" [58]. Il n'est pas forcément évident de déterminer G et on a alors recours à la solution fondamentale en espace infini g .

Enfin, on considère le cas où M appartient à la frontière Γ . Du fait de la singularité de $g(M, N)$ lorsque M tend vers N , il est nécessaire de prendre l'intégrale sur Γ en valeur principale (V.P.) au sens de Cauchy et il en résulte pour tout point de la frontière ne présentant pas de discontinuité :

$$\frac{1}{2} p(M) = \text{V.P.} \int_{N \in \Gamma} \rho_f \omega^2 u_n(N) g(M, N) dS, \quad M \in \Gamma. \quad (5.76)$$

Notons que, dans cette dernière équation, $p(M)$ est remplacé par $\frac{1}{2} p(M)$. On peut l'interpréter comme suit : lorsque M appartient au domaine, on intègre le δ de Dirac tout autour de la singularité ; lorsque M appartient à la frontière, seule une moitié du domaine est concernée.

Dans le cas particulier du baffle plan rigide, chaque point de la source émet une onde hémisphérique. On est ramené au principe de Huyghens.

Cette hypothèse est viable pour nos applications dans la mesure où l'on reste dans le domaine des petites déformations.

Remarque 1 : En règle générale, la formulation intégrale de frontière s'écrit :

$$c(M)p(M) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial n} g - p \frac{\partial g}{\partial n} \right) dS, \quad (5.77)$$

avec :

– en deux dimensions [58] :

$$g(r) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kr), \quad (5.78)$$

et

$$c(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } M \in \Omega \\ 1/2 & \text{si } M \in \Gamma \text{ et } \Gamma \text{ continue en } M \\ \alpha/2\pi & \text{si } M \in \Gamma \text{ et } \Gamma \text{ non continue en } M \end{cases} \quad (5.79)$$

– en trois dimensions :

$$g(r) = \frac{1}{4\pi r} \exp(-jkr), \quad (5.80)$$

et

$$c(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } M \in \Omega \\ 1/2 & \text{si } M \in \Gamma \text{ et } \Gamma \text{ continue en } M \\ \alpha/4\pi & \text{si } M \in \Gamma \text{ et } \Gamma \text{ non continue en } M \end{cases} \quad (5.81)$$

où α est l'angle solide au point de discontinuité.

Remarque 2 : Dans cette partie on a pris la normale à l'interface extérieure au domaine fluide. Du point de vue de la partie éléments finis, la normale est prise extérieure au domaine solide et donc intérieure au domaine fluide. Dans ce dernier cas on a en tout point M de l'interface :

$$T_{ij} n_j = -p n_i, \quad (5.82)$$

avec :

$$\frac{1}{2} p(M) = \text{V.P.} \int_{N \in \Gamma} -\rho_f \omega^2 u_n(N) g(M, N) dS. \quad (5.83)$$

Soit encore :

$$T_{ij} n_j = \text{V.P.} \int_{N \in \Gamma} 2\rho_f \omega^2 u_n(N) g(M, N) dS n_i. \quad (5.84)$$

5.4.3 Problème fluide/structure : cas des structures périodiques

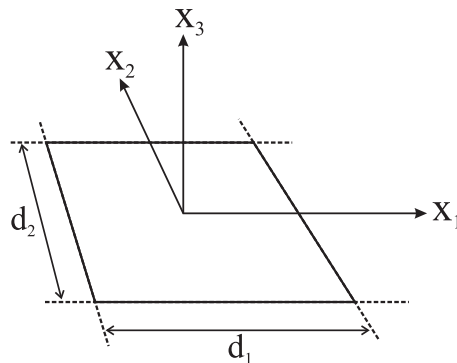


FIG. 5.10 – Cellule élémentaire rectangulaire dans le système d'axes choisi.

On considère une structure bi-périodique, dont la cellule élémentaire est rectangulaire de côtés d_1 et d_2 suivant x_1 et x_2 (Fig. 5.10). La face rayonnante est supposée plane et l'axe x_3 normal à cette surface.

Le réseau périodique est soumis à une excitation harmonique (cf Sect. 5.3.1) de paramètres d'excitation γ_1 et γ_2 . La solution fondamentale du problème est alors la réponse à l'interface à une excitation de type combinaison linéaire de pics de Dirac translatés [59, 60] :

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \delta(x_1 - md_1, x_2 - nd_2) \exp(-j2\pi(m\gamma_1 + n\gamma_2)). \quad (5.85)$$

Réécrivons (5.84) sous la forme (en sous-entendant V.P.) :

$$T_{ij} n_j(x_1, x_2) = n_i 2\rho_f \omega^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) u_k(x'_1, x'_2) n_k dx'_1 dx'_2 \quad (5.86)$$

$$= n_i 2\rho_f \omega^2 \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \int_{(m-\frac{1}{2})d_1}^{(m+\frac{1}{2})d_1} \int_{(n-\frac{1}{2})d_2}^{(n+\frac{1}{2})d_2} g(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) \times u_k(x'_1, x'_2) n_k dx'_1 dx'_2 \quad (5.87)$$

$$= n_i 2\rho_f \omega^2 \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{d_1}{2}}^{+\frac{d_1}{2}} \int_{-\frac{d_2}{2}}^{+\frac{d_2}{2}} g(x_1 - x'_1 - md_1, x_2 - x'_2 - nd_2) \times u_k(x'_1 + md_1, x'_2 + nd_2) n_k dx'_1 dx'_2 \quad (5.88)$$

(changements de variables : $x'_1 \leftarrow x'_1 - md_1$ et $x'_2 \leftarrow x'_2 - nd_2$)

$$= n_i 2\rho_f \omega^2 \int_{-\frac{d_1}{2}}^{+\frac{d_1}{2}} \int_{-\frac{d_2}{2}}^{+\frac{d_2}{2}} \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} g(x_1 - x'_1 - md_1, x_2 - x'_2 - nd_2) \times e^{-j2\pi(m\gamma_1 + n\gamma_2)} u_k(x'_1, x'_2) n_k dx'_1 dx'_2 \quad (5.89)$$

(théorème de Floquet pour u_k)

soit encore :

$$T_{ij} n_j(x_1, x_2) = n_i 2\rho_f \omega^2 \int_{-\frac{d_1}{2}}^{+\frac{d_1}{2}} \int_{-\frac{d_2}{2}}^{+\frac{d_2}{2}} g^{(\gamma_1, \gamma_2)}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) u_n(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2, \quad (5.90)$$

avec la fonction de Green harmonique :

$$g^{(\gamma_1, \gamma_2)}(x_1, x_2) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} g(x_1 - md_1, x_2 - nd_2) \exp(-j2\pi(m\gamma_1 + n\gamma_2)). \quad (5.91)$$

Cette dernière expression est en accord avec la définition donnée en préambule.

Si on écrit la transformée de Fourier de $g(x_1, x_2)$:

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_1, k_2) e^{-j(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dk_1 dk_2, \quad (5.92)$$

on peut réécrire la fonction de Green harmonique (5.91) :

$$g^{(\gamma_1, \gamma_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_1, k_2) e^{-j(k_1(x_1 - md_1) + k_2(x_2 - nd_2))} \times e^{-j2\pi(m\gamma_1 + n\gamma_2)} dk_1 dk_2, \quad (5.93)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(md_1(\frac{2\pi\gamma_1}{d_1} - k_1) + nd_2(\frac{2\pi\gamma_2}{d_2} - k_2))} \right) \tilde{g}(k_1, k_2) \times e^{-j(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dk_1 dk_2, \quad (5.94)$$

or d'après [61] :

$$\frac{(2\pi)^2}{ab} \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \delta(k' - \frac{2\pi m}{a}, k'' - \frac{2\pi n}{b}) = \text{T.F.} \left(\sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \delta(x' - ma, x'' - nb) \right), \quad (5.95)$$

et

$$\exp(-j(mak' + nbk'')) = \text{T.F.} (\delta(x' - ma, x'' - nb)), \quad (5.96)$$

d'où

$$\sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(md_1(\frac{2\pi\gamma_1}{d_1} - k_1) + nd_2(\frac{2\pi\gamma_2}{d_2} - k_2))} = \frac{(2\pi)^2}{d_1 d_2} \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \delta(k_1 - \frac{2\pi}{d_1}(\gamma_1 + m), k_2 - \frac{2\pi}{d_2}(\gamma_2 + n)), \quad (5.97)$$

en posant $a = d_1$, $b = d_2$, $k' = k_1 - \frac{2\pi\gamma_1}{d_1}$ et $k'' = k_2 - \frac{2\pi\gamma_2}{d_2}$. Finalement la fonction de Green périodique harmonique s'écrit, par convolution de $\tilde{g}(k_1, k_2) e^{-j(k_1 x_1 + k_2 x_2)}$ avec le Dirac de (5.97) :

$$g^{(\gamma_1, \gamma_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_m, k_n) e^{-j(k_m x_1 + k_n x_2)}, \quad (5.98)$$

avec :

$$k_m = \frac{2\pi}{d_1}(\gamma_1 + m) \quad \text{et} \quad k_n = \frac{2\pi}{d_2}(\gamma_2 + n), \quad (5.99)$$

soit encore :

$$g^{(\gamma_1, \gamma_2)}(x_1, x_2) = e^{-j(\frac{2\pi\gamma_1}{d_1}x_1 + \frac{2\pi\gamma_2}{d_2}x_2)} \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\frac{2\pi}{d_1}(\gamma_1 + m), \frac{2\pi}{d_2}(\gamma_2 + n)) e^{-j(\frac{2\pi m}{d_1}x_1 + \frac{2\pi n}{d_2}x_2)}. \quad (5.100)$$

On reconnaît dans cette dernière expression une série de Bloch-Floquet pour une structure périodique de "maille" rectangulaire dont les vecteurs du réseau réciproque sont $(\frac{2\pi m}{d_1}, \frac{2\pi n}{d_2})$ et le vecteur d'onde est $(\frac{2\pi\gamma_1}{d_1}, \frac{2\pi\gamma_2}{d_2})$.

Notons que l'on peut dès lors généraliser l'expression de la fonction de Green périodique pour l'appliquer à une structure dont la "maille" est par exemple hexagonale.

La pression acoustique du fluide à l'interface contribue au terme $(\int_{\Gamma} \overline{\delta u_i} f_i^{\Gamma} dS)$ de la formulation va-

riationnelle (5.17) (pour le cas complexe) telle que, d'après (5.90) :

$$\int_{\Gamma_{ray}} \overline{\delta u_i} f_i^\Gamma dS = \int_{\Gamma_{ray}} \overline{\delta u_i} T_{ij} n_j dS \quad (5.101)$$

$$= 2\rho_f \omega^2 \iint_{\Gamma_{ray}} \left[\overline{\delta u_n}(x_1, x_2) \iint_{\Gamma_{ray}} g^{(\gamma_1, \gamma_2)}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) \times u_n(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 \right] dx_1 dx_2, \quad (5.102)$$

$$\left(\iint_{\Gamma_{ray}} \equiv \int_{-\frac{d_1}{2}}^{+\frac{d_1}{2}} \int_{-\frac{d_2}{2}}^{+\frac{d_2}{2}} \right)$$

$$\int_{\Gamma_{ray}} \overline{\delta u_i} f_i^\Gamma dS = \frac{2\rho_f \omega^2}{d_1 d_2} \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} \left[\tilde{g}(k_p, k_q) \iint_{\Gamma_{ray}} \overline{\delta u_n}(x_1, x_2) e^{-j(k_p x_1 + k_q x_2)} dx_1 dx_2 \right. \\ \left. \times \iint_{\Gamma_{ray}} u_n(x'_1, x'_2) e^{j(k_p x'_1 + k_q x'_2)} dx'_1 dx'_2 \right]. \quad (5.103)$$

Le produit de convolution entre la fonction de Green et le déplacement normal fait apparaître une deuxième intégrale de frontière dans la forme intégrale des sources extérieures. Le déplacement normal y apparaît au même titre que sa variation. Enfin l'expression de la fonction de Green périodique permet une séparation des deux intégrales.

On applique ensuite la procédure de discrétisation :

$$\int_{\Gamma_{ray}} \overline{\delta u_i} f_i^\Gamma dS = \frac{2\rho_f \omega^2}{d_1 d_2} \sum_{p,q=-L}^{+L} \left[\tilde{g}(k_p, k_q) \sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{Nd(e)} \left(\overline{\delta u_n^{(m,e)}} I_{(k_p, k_q)}^{(m,e)} \right) \right. \\ \left. \times \sum_{\epsilon=1}^E \sum_{\mu=1}^{Nd(\epsilon)} \left(u_n^{(\mu,\epsilon)} I_{(k_p, k_q)}^{(\mu,\epsilon)} \right) \right], \quad (5.104)$$

avec :

$$I_{(k_p, k_q)}^{(\mu,\epsilon)} = \iint_{\Gamma_\epsilon} N_\mu(x_1, x_2) e^{j(k_p x_1 + k_q x_2)} dx_1 dx_2. \quad (5.105)$$

La pression acoustique à l'interface fait apparaître la fonction de Green spectrale \tilde{g} et des intégrales sur chaque élément du produit d'un polynôme par un terme exponentiel complexe. Les polynômes N_μ sont les fonctions d'interpolation des degrés de liberté du système. La somme sur les indices p et q est limitée à un nombre fini de termes pour des raisons évidentes. Il est entendu qu'un nombre suffisant de termes doit être considéré pour que le calcul garde sa pertinence.

La contribution du rayonnement au système algébrique global (5.54) est une matrice fonction des paramètres d'excitation γ_1 et γ_2 et de la pulsation ω . Soit $X^{(\gamma_1, \gamma_2)}(\omega)$ cette matrice, elle relie entre eux les degrés de liberté de la frontière rayonnante ainsi que leurs variations de telle sorte que :

$$\int_{\Gamma_{ray}} \overline{\delta u_i} f_i^\Gamma dS = \overline{\delta \mathbf{u}}^T \left[X^{(\gamma_1, \gamma_2)}(\omega) \right] \mathbf{u}. \quad (5.106)$$

En conséquence, elle apparaît dans le terme de gauche de (5.54) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{C_{v \rightarrow u}} & 0 \\ 0 & \overline{C_{\varphi \rightarrow \phi}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{uu} - \omega^2 M_{uu} - X^{(\gamma_1, \gamma_2)}(\omega) & K_{u\phi} \\ & K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{v \rightarrow u} & 0 \\ 0 & C_{\varphi \rightarrow \phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \varphi \end{pmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \overline{C_{v \rightarrow u}} & 0 \\ 0 & \overline{C_{\varphi \rightarrow \phi}} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} F \\ Q \end{pmatrix} \quad (5.107) \end{aligned}$$

La procédure de résolution classique est ensuite appliquée. De même que l'on calcule le vecteur des densités de charge nodales Q en multipliant le vecteur solution par la matrice du système, on a la possibilité de calculer la pression émise par la sonde en multipliant le vecteur solution par la matrice du système de laquelle on aura préalablement retiré la matrice de rayonnement $X^{(\gamma_1, \gamma_2)}(\omega)$.

5.4.4 Problème général : rayonnement dans un solide

En pratique les fonctions de Green \tilde{g} sont calculées numériquement par la méthode de la matrice de diffusion [62, 63]. Cette méthode est dédiée à l'analyse des structures multi-couches piezo-electriques, fluides et métalliques. Dans notre cas, cela signifie que les milieux dans lesquels notre sonde rayonne peuvent être semi-infinis, finis (cas d'une plaque), et plus généralement stratifiés et composés de n'importe quels matériaux fluides ou solides. Par exemple pour une sonde d'imagerie, l'absorbant (tout au moins sa partie non sous-découpée) est pris en compte dans le rayonnement. Les lames d'adaptation d'impédance, jusque-là maillées, si elles ne sont pas découpées, peuvent être prises en compte dans la structure multi-couche. Le maillage est alors réduit et le système à résoudre est moins grand en terme de nombre de degrés de liberté. La méthode de la matrice de diffusion évite un écueil de la méthode de la matrice de transfert de Fahmy et Adler [64, 65] dont elle est issue. Cette dernière devient instable numériquement (problèmes de dépassement) lorsque l'épaisseur des couches devient trop grande, point crucial pour nos applications. De plus elle étend le domaine d'application aux métaux et aux fluides, les méthodes précédentes s'appliquant exclusivement aux matériaux piézo-électriques et diélectriques.

Dans la méthode de la matrice de diffusion, on définit en lieu et place de la fonction de Green \tilde{g} le tenseur de Green spectral \tilde{G}_{ij} tel qu'à la surface d'une structure homogène dans le plan il vienne :

$$\tilde{\tau}_3 = [\tilde{G}] \tilde{u}, \quad (5.108)$$

où l'on définit par commodité de notation le vecteur des déplacements généralisés $u = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ \phi)^T$ et le vecteur des contraintes généralisées $\tau_i = (\tau_{i1} \ \tau_{i2} \ \tau_{i3} \ \mathcal{D}_i)$ avec $\tau_{ij} = -T_{ij}/j\omega$ et $\mathcal{D}_i = -D_i/j\omega$. Ces notations viennent de la réécriture des équations constitutives (4.17) et (4.18) sous la forme :

$$T_{ij} = -j\omega s_l (c_{ijkl}^E u_k + e_{ijl} \phi), \quad (5.109)$$

$$D_j = -j\omega s_l (e_{jkl} u_k - \varepsilon_{jl}^S \phi), \quad (5.110)$$

en supposant une dépendance harmonique dans le temps et l'espace, avec $s_l = k_l/\omega$ la lenteur. Le tenseur de Green relie les contraintes normales aux déplacements à la surface.

En toute rigueur, le tenseur de Green est de dimension trois tel que :

$$\tilde{\tau}_{ij} = \tilde{G}_{ijk} \tilde{u}_k + \tilde{G}_{ij4} \tilde{\phi}, \quad (5.111)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_j = \tilde{G}_{4jk} \tilde{u}_k + \tilde{G}_{4j4} \tilde{\phi}. \quad (5.112)$$

Si on note $u_4 = \phi$ comme précédemment et $T_{4j} = D_j$, l'analogie de l'équation (5.100) dans le cas général s'écrit :

$$T_{ij} n_j(x_1, x_2) = -j\omega n_j \iint_{\Gamma_{ray}} G_{ijk}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) u_k(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2, \quad (5.113)$$

où :

$$G_{ijk}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{d_1 d_2} \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_{ijk}(s_m, s_n) e^{-j\omega(s_m x_1 + s_n x_2)}, \quad (5.114)$$

avec :

$$s_m = k_m/\omega = \frac{2\pi}{d_1 \omega}(\gamma_1 + m) \quad \text{et} \quad s_n = k_n/\omega = \frac{2\pi}{d_2 \omega}(\gamma_2 + n). \quad (5.115)$$

Finalement, on obtient comme pour le fluide après discrétisation :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{ray}} \overline{\delta u_i} f_i^\Gamma dS &= \frac{-j\omega}{d_1 d_2} \sum_{p, q=-L}^{+L} \left[\tilde{G}_{ijk}(s_p, s_q) n_j \sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{Nd(e)} \left(\overline{\delta u_i^{(m, e)}} I_{(s_p, s_q)}^{(m, e)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{\epsilon=1}^E \sum_{\mu=1}^{Nd(\epsilon)} \left(u_k^{(\mu, \epsilon)} I_{(s_p, s_q)}^{(\mu, \epsilon)} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.116)$$

avec :

$$I_{(s_p, s_q)}^{(\mu, \epsilon)} = \iint_{\Gamma_\epsilon} N_\mu(x_1, x_2) e^{j\omega(s_p x_1 + s_q x_2)} dx_1 dx_2. \quad (5.117)$$

Dans le système d'axe choisi avec la normale \mathbf{n} extérieure au domaine maillé (partie FEA), on a :

$$\tilde{G}_{ijk} n_j = \tilde{G}_{i3k} \equiv \tilde{G}_{ik}, \quad (5.118)$$

et l'on retrouve la définition du tenseur de Green selon la méthode de la matrice de diffusion.

Comme pour le cas du fluide, on construit une matrice de rayonnement telle que :

$$\int_{\Gamma_{ray}} \overline{\delta u_i} f_i^\Gamma dS = (\overline{\delta \mathbf{u}}^T \overline{\delta \boldsymbol{\phi}}^T) \begin{bmatrix} X_{uu}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(\omega) & X_{u\phi}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(\omega) \\ X_{\phi u}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(\omega) & X_{\phi\phi}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix}. \quad (5.119)$$

Le système global (5.54) devient :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{C_{v \rightarrow u}} & 0 \\ 0 & \overline{C_{\phi \rightarrow \phi}} \end{bmatrix}^T \left[\begin{bmatrix} K_{uu} - \omega^2 M_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{uu}^{(\gamma_1, \gamma_2)} & X_{u\phi}^{(\gamma_1, \gamma_2)} \\ X_{\phi u}^{(\gamma_1, \gamma_2)} & X_{\phi\phi}^{(\gamma_1, \gamma_2)} \end{bmatrix}(\omega) \right] \\ \times \begin{bmatrix} C_{v \rightarrow u} & 0 \\ 0 & C_{\phi \rightarrow \phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C_{v \rightarrow u}} & 0 \\ 0 & \overline{C_{\phi \rightarrow \phi}} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.120)$$

Deux points essentiels apparaissent dans le calcul de la matrice de rayonnement. Le premier est le calcul des tenseurs de Green pour toutes valeurs de γ_1 , γ_2 et ω , qui a été abordé au début de cette section. Le deuxième est le calcul des intégrales $I_{(s_p, s_q)}^{(\mu, \epsilon)}$, que l'on peut renoter $I_{(\gamma_1+p, \gamma_2+q)}^{(\mu, \epsilon)}$, en chaque nœud μ et pour chaque élément ϵ de la frontière. Cela consiste à intégrer sur un élément de surface quelconque le produit d'un polynôme par une exponentielle complexe. De plus on doit calculer cette intégrale pour tout type d'éléments utilisés, sachant que les éléments tridimensionnels utilisés dans le maillage conditionnent les éléments de frontière, qui ne sont rien d'autre que les faces des éléments tridimensionnels du maillage. Il faut

donc prendre en compte la forme des éléments de frontière (triangle, quadrangle) et leur type d'interpolation (linéaire, quadratique).

L'intégrale est réalisée sur l'élément de référence [51]. Dans le cas des éléments triangle linéaire (premiers éléments utilisés), une expression analytique a été établie (voir annexe B), ce qui permet de ne pas rajouter une approximation supplémentaire due à une intégration numérique. Cependant, les calculs ont rapidement nécessité l'utilisation d'éléments quadratiques. Pour ces autres types d'éléments, on effectue une intégration numérique via la librairie mathématique IMSL. Etablir une expression analytique pour certains de ces derniers est à portée de logiciels de calcul formel tels que Maple, toutefois la complexité de ces expressions est une source d'erreurs potentielles pour le développeur lui-même et surtout pour ceux qui devront assurer le suivi du programme par la suite. Avant de recourir à de telles solutions, la procédure d'intégration numérique a été mise en place et testée avec succès.

5.4.5 Généralisation du tenseur de Green périodique et rayonnement d'un réseau hexagonal

Comme on l'a remarqué précédemment, le tenseur de Green périodique s'écrit sous la forme d'une série de Bloch-Floquet [33] telle que :

$$G_{ijk}^P(\mathbf{r}) = \frac{1}{S_{\Gamma_{ray}}} \sum_{\boldsymbol{\beta}} \tilde{G}_{ijk}(\mathbf{k} + \boldsymbol{\beta}) \exp(-j(\mathbf{k} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{r}), \quad (5.121)$$

où $S_{\Gamma_{ray}}$ est l'aire de la surface rayonnante sur une période et les vecteurs $\boldsymbol{\beta}$ représentent, dans cette partie uniquement, les vecteurs du réseau réciproque tels que décrits dans la section 6.2.2.

Le rapport $\frac{1}{S_{\Gamma_{ray}}}$ est dû au fait que le tenseur de Green relie les déplacements à une densité surfacique de forces.

Pour une cellule hexagonale de côté d , la surface $S_{\Gamma_{ray}}$ vaut $3\sqrt{3}d^2/2$, et les vecteurs $\mathbf{k} + \boldsymbol{\beta}$ s'écrivent :

$$\mathbf{k} + \boldsymbol{\beta} = \begin{cases} \frac{2\pi}{d\sqrt{3}}(\gamma_1 + m + \gamma_2 + n) \\ \frac{2\pi}{d\sqrt{3}}(\gamma_1 + m - \gamma_2 - n) \end{cases}, \quad (5.122)$$

pour tous entiers relatifs m et n .

5.5 Conclusion

Afin de tirer parti de la nature massivement périodique des sondes ultrasonores, nous avons développé un outil spécifique de calcul numérique à partir de la méthode des éléments finis. Les sondes sont considérées planes suivant leurs directions de périodicité, ce qui signifie en pratique que les interfaces sondes-milieux de propagation sont planes. Le principal intérêt de cette méthode vient de ce qu'il suffit de mailler une cellule élémentaire de la sonde. De plus, seule la partie inhomogène nécessite d'être maillée, les parties homogènes stratifiées étant prises en compte dans les conditions de rayonnement. La figure 5.11 résume la réduction du problème périodique, sans aucune perte de généralités.

De plus, cette méthode est particulièrement adaptée au calcul des grandeurs harmoniques et mutuelles, notion développée dans la section 3.2, et à l'estimation des effets de diaphonie. Un point essentiel de cette méthode est que la réduction du problème à une cellule élémentaire ne particularise en rien le problème. Contrairement à d'autres modèles, elle ne se contente pas d'imposer une vibration synchrone de tous les

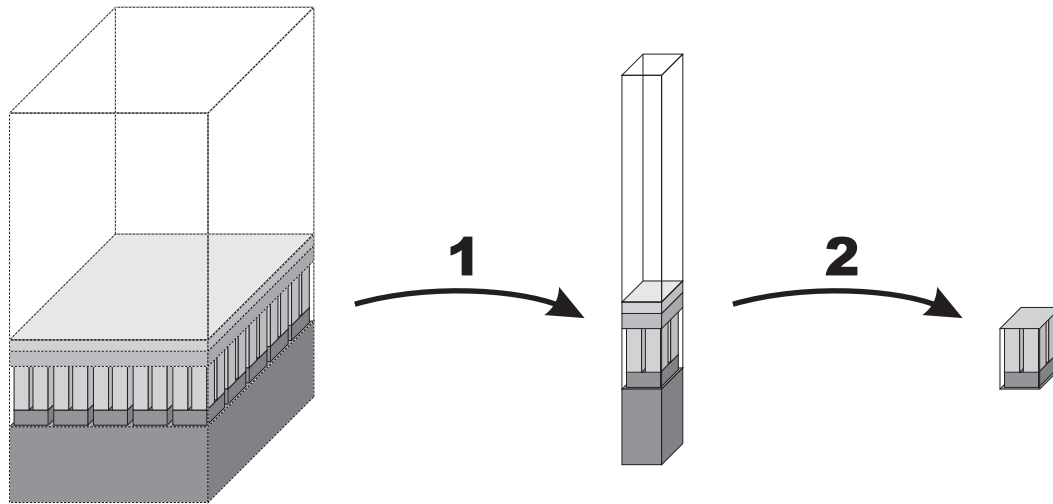


FIG. 5.11 – Représentation schématique de la réduction du problème périodique appliqué à un réseau de transducteurs bidimensionnelles. Le réseau consiste en un composite 1-3. Le backing est découpé pour minimiser les effets de diaphonie dus au backing entre les pixels électriques. Le composite est recouvert de deux lames d'adaptation d'impédance, puis du milieu de propagation (eau, lentille, etc.). L'application des conditions de périodicité (1) réduit le problème à une cellule élémentaire. Le traitement du rayonnement par éléments de frontière (2) réduit le problème à sa partie inhomogène.

éléments du réseau, mais elle permet d'envisager toutes les possibilités d'excitation de ce dernier. Autrement dit, on sait tenir compte du mode opératoire réel de la sonde.

Si on applique ici la méthode aux sondes ultrasonores, il n'y a pas lieu de restreindre son champ d'application à ces seuls dispositifs. On peut envisager par exemple de l'appliquer aux dispositifs à ondes de surface afin de prendre en compte le caractère fini des peignes interdigités et les bus auxquels ils sont reliés.

Chapitre 6

Développement en ondes planes pour l'étude des composites

Les modèles de développement en ondes planes, connus en anglais sous l'acronyme PWE (*plane-wave expansion*), ont été très utilisés d'abord en photonique [Refs]. Ils ont été développés pour décrire des structures présentant périodiquement des inhomogénéités dans le plan ou dans le volume. Ils ont été appliqués ensuite au domaine des ondes élastiques pour l'étude des composites et des cristaux phononiques [28, 66]. Ces derniers sont des guides d'onde microstructurés utilisant le phénomène de bandes d'arrêt au même titre que les cristaux photoniques en optique.

Toutefois, les développements proposés ne prennent pas en compte la piézoélectricité ou tout au moins le caractère anisotrope des matériaux, les pertes acoustiques, ou encore le caractère fini en épaisseur des dispositifs réels. Néanmoins, la possibilité de simuler une structure semi-infinie a été démontrée [67], sans toutefois s'appliquer à tout matériau anisotrope.

La prise en compte de la piézo-électricité a été rendue possible grâce à l'adaptation de la méthode Fahmy-Adler [64, 65], issue du domaine des ondes de surface, au développement en ondes planes.

On présente dans ce chapitre une formulation matricielle générale et complète adaptée aux composites anisotropes et piézoélectriques. On applique ensuite cette formulation au cas des composites bipériodiques, dont font partie les piézocomposites 1-3. On complète tout d'abord l'analyse classique des composites d'épaisseur infinie, qui consiste à tracer les courbes de dispersion des modes se propageant dans le plan de la structure, en étendant la méthode à la propagation des ondes hors du plan de la structure. En d'autres termes, on suppose un composite bipériodique d'épaisseur infinie (par exemple un réseau de barreaux infinis) et on étudie la propagation des ondes dans ce milieu quels que soient leurs angles d'incidence par rapport au plan du réseau (plan normal aux axes des barreaux). Dans un deuxième temps, on particularise la formulation générale au cas des milieux d'épaisseur finie (plaque) et semi-infinie.

6.1 Préambule : approche simple

Avant d'appliquer la méthode Fahmy-Adler au développement en ondes planes, on se propose de donner un aperçu du problème en utilisant certaines hypothèses simplificatrices [66]. Appliqués aux piézocomposites 1-3, les travaux antérieurs avaient pour but de localiser spectralement les modes latéraux [28]. On reproduit ici la démarche.

Construction du problème

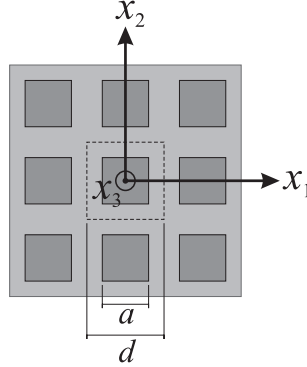


FIG. 6.1 – Composite 1-3 étudié à l'aide de la méthode de développement en ondes planes.

On considère le composite de connectivité 1-3 d'épaisseur infinie de la figure 6.1. La structure est bi-périodique et la cellule élémentaire, de section carrée, a pour côté d . L'axe x_3 est pris normal au plan de la structure. On ne s'intéresse qu'aux ondes se propageant dans le plan de la structure (x_1, x_2) et polarisée suivant x_3 (déplacements suivants x_3).

Le milieu étant continu suivant x_3 , les dérivées spatiales $\partial/\partial x_3$ sont nulles. L'équation de Christoffel s'écrit :

$$[\Gamma] \mathbf{u} = -\rho \omega^2 \mathbf{u}, \quad (6.1)$$

où :

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(c_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(c_{66} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(c_{12} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(c_{66} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(c_{12} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(c_{66} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(c_{11} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(c_{66} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(c_{44} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(c_{44} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Les coefficients de rigidité c_{IJ} et la masse volumique ρ sont des fonctions périodiques de l'espace et sont écrites sous forme de séries de Fourier :

$$c_{IJ}(x_1, x_2) = c_{IJ}(\mathbf{r}) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} c_{IJ}^{\mathbf{G}_{mn}} \exp(-j \mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{r}), \quad (6.3)$$

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(\mathbf{r}) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \rho^{\mathbf{G}_{mn}} \exp(-j \mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{r}), \quad (6.4)$$

où $\mathbf{G}_{mn} = (\frac{2\pi m}{d}, \frac{2\pi n}{d}, 0)$ sont les vecteurs du réseau réciproque (cf section C) en m^{-1} , commensurables à un vecteur d'onde, et $\mathbf{r} = (x_1 \ x_2)^T$ est le vecteur position dans l'espace direct. Les termes spectraux des constantes matériaux $\alpha^{\mathbf{G}_{mn}} = \{c_{IJ}^{\mathbf{G}_{mn}}, \rho^{\mathbf{G}_{mn}}\}$ sont obtenus par :

$$\alpha^{\mathbf{G}_{mn}} = \frac{1}{d^2} \iint_{\text{cellule}} \alpha(\mathbf{r}) \exp(j \mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{r}) d^2 \mathbf{r}, \quad (6.5)$$

soit :

$$\alpha^{\mathbf{G}_{mn}} = \bar{\alpha} = \alpha^{\text{barre}} f + \alpha^{\text{matrice}} (1 - f) \quad \text{si } \mathbf{G}_{mn} = 0, \quad (6.6)$$

$$\alpha^{\mathbf{G}_{mn}} = (\alpha^{\text{barre}} - \alpha^{\text{matrice}}) F^{\mathbf{G}_{mn}} = \Delta \alpha F^{\mathbf{G}_{mn}} \quad \text{si } \mathbf{G}_{mn} \neq 0, \quad (6.7)$$

où α^{barre} et α^{matrice} sont les valeurs de la constante matériau α des plots et de la matrice respectivement. f est la fraction volumique des barreaux dans la matrice. $F^{\mathbf{G}_{mn}}$ est le facteur de structure donné par :

$$F^{\mathbf{G}_{mn}} = f \operatorname{sinc} \left(G_{1,mn} \frac{a}{2} \right) \operatorname{sinc} \left(G_{2,mn} \frac{a}{2} \right) \quad (6.8)$$

pour des barreaux de section carrée de côté a . Pour une onde de vecteur d'onde \mathbf{k} se propageant dans le plan de la structure, le champ de déplacement \mathbf{u} se décompose en une série de Bloch-Floquet telle que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{\mathbf{k}+\mathbf{G}_{pq}} \exp(-j \mathbf{G}_{pq} \cdot \mathbf{r}) \quad (6.9)$$

$$= \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{\mathbf{k}+\mathbf{G}_{pq}} \exp(j(\omega t - (\mathbf{k} + \mathbf{G}_{pq}) \cdot \mathbf{r})), \quad (6.10)$$

avec :

$$\mathbf{u}^{\mathbf{k}+\mathbf{G}_{pq}} = \frac{1}{d^2} \iint_{\text{cellule}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \exp(j(\mathbf{k} + \mathbf{G}_{pq}) \cdot \mathbf{r}) \text{ pour tout } (p, q) \in \mathbb{Z}^2. \quad (6.11)$$

Ce développement est semblable à une série de Fourier avec une contribution supplémentaire due à la propagation. C'est un développement en ondes planes de vecteurs d'ondes $\mathbf{k} + \mathbf{G}_{pq}$. Par cette écriture, le champ de déplacements est écrit de façon unifiée en tout point de la cellule inhomogène.

D'après l'équation de Christoffel, l'équation de propagation qui nous intéresse dans ce cas précis est :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = -\rho \omega^2 u_3. \quad (6.12)$$

On injecte les expressions des coefficients matériaux et des champs en séries de Fourier et de Bloch-Floquet :

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} \left[c_{44}^{\mathbf{G}_{mn}} (\mathbf{k} + \mathbf{G}_{pq}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}_{mn} + \mathbf{G}_{pq}) - \omega^2 \rho^{\mathbf{G}_{mn}} \right] \times e^{-j(\mathbf{G}_{mn}+\mathbf{G}_{pq}) \cdot \mathbf{r}} u_3^{\mathbf{k}+\mathbf{G}_{pq}} e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = 0 \quad (6.13)$$

On peut simplifier cette expression puisque les composantes du vecteur d'onde \mathbf{k} sont supposées réelles. On effectue le changement de variables : $\mathbf{G}'_{mn} = \mathbf{G}_{mn} + \mathbf{G}_{pq}$, ce qui ne change rien à l'expression puisque les sommes sont effectuées sur $] - \infty, +\infty[$. Ce changement de variables est une étape préliminaire à la projection orthogonale qui vient ensuite. On obtient :

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} \left[c_{44}^{\mathbf{G}'_{mn}-\mathbf{G}_{pq}} (\mathbf{k} + \mathbf{G}_{pq}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}'_{mn}) - \omega^2 \rho^{\mathbf{G}'_{mn}-\mathbf{G}_{pq}} \right] u_3^{\mathbf{k}+\mathbf{G}_{pq}} e^{-j \mathbf{G}'_{mn} \cdot \mathbf{r}} = 0. \quad (6.14)$$

On multiplie par $e^{j \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{r}}$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ et on intègre sur la cellule élémentaire :

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} \left[c_{44}^{\mathbf{G}_{mn}-\mathbf{G}_{pq}} (\mathbf{k} + \mathbf{G}_{pq}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}_{mn}) - \omega^2 \rho^{\mathbf{G}_{mn}-\mathbf{G}_{pq}} \right] \times u_3^{\mathbf{k}+\mathbf{G}_{pq}} \iint_{\text{cellule}} e^{-j \mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{r}} e^{j \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{r} = 0. \quad (6.15)$$

Cette dernière opération équivaut à une projection orthogonale sur la base des fonctions trigonométriques. La propriété d'orthogonalité des fonctions de la base permet de se départir de la dépendance spatiale de l'équation de propagation. On a :

$$\frac{1}{d^2} \iint_{\text{cellule}} e^{-j \mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{r}} e^{j \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{r} = \delta(ij, mn), \quad (6.16)$$

et finalement, pour tout (i, j) :

$$\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} \left[c_{44}^{\mathbf{G}_{ij}-\mathbf{G}_{pq}} (\mathbf{k} + \mathbf{G}_{pq}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}_{ij}) - \omega^2 \rho^{\mathbf{G}_{ij}-\mathbf{G}_{pq}} \right] u_3^{\mathbf{k}+\mathbf{G}_{pq}} = 0. \quad (6.17)$$

En conservant un nombre fini de termes dans les séries de Fourier et Bloch-Floquet, on peut écrire le système aux valeurs propres :

$$[A] \left(u_3^{\mathbf{k}+\mathbf{G}_{pq}} \right) = \omega^2 [B] \left(u_3^{\mathbf{k}+\mathbf{G}_{pq}} \right) \quad (p, q) \in [-N, N]^2. \quad (6.18)$$

On résoud enfin ce système à \mathbf{k} fixée pour tracer les courbes de dispersion du composite pour des ondes se propageant dans le plan de la structure et de polarisation transverse verticale.

Notons que dans le cas isotrope, un deuxième système aux valeurs propres permet de tracer les courbes de dispersion pour les ondes polarisées dans le plan du réseau (cf référence [66]).

Application

L'exemple [28] porte sur un piézocomposite 1-3 pour lequel $d = 100 \mu\text{m}$ et $a = 50 \mu\text{m}$. Les constantes de la céramique sont : $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$ et $c_{44} = 4,2 \times 10^{10} \text{ Pa}$, et celles de la résine : $\rho = 1150 \text{ kg/m}^3$ et $c_{44} = 0,17 \times 10^{10} \text{ Pa}$.

Les figures 6.2(a)-(b) présentent les courbes de dispersion dans la première zone de Brillouin (cf section C), pour une propagation des ondes suivant l'axe x_1 et suivant la diagonale $x_2 = x_1$ respectivement.

La valeur du vecteur d'onde \mathbf{k} est notée ici k_0 . Pour $k_0 d / \pi$ ou $k_0 d / \pi \sqrt{2}$ égal à 0 ou à 1, le vecteur d'onde se situe au centre ou en bordure de la zone de Brillouin, où les conditions de diffraction de Bragg sont remplies, et on se retrouve en présence d'ondes stationnaires. Pour $k_0 d / \pi$ égal à 0, tous les barreaux vibrent en phase. Aux fréquences de 11,57 MHz et 18,23 MHz, on trouve respectivement les premier et second modes latéraux évoqués dans la section 2.4.5.

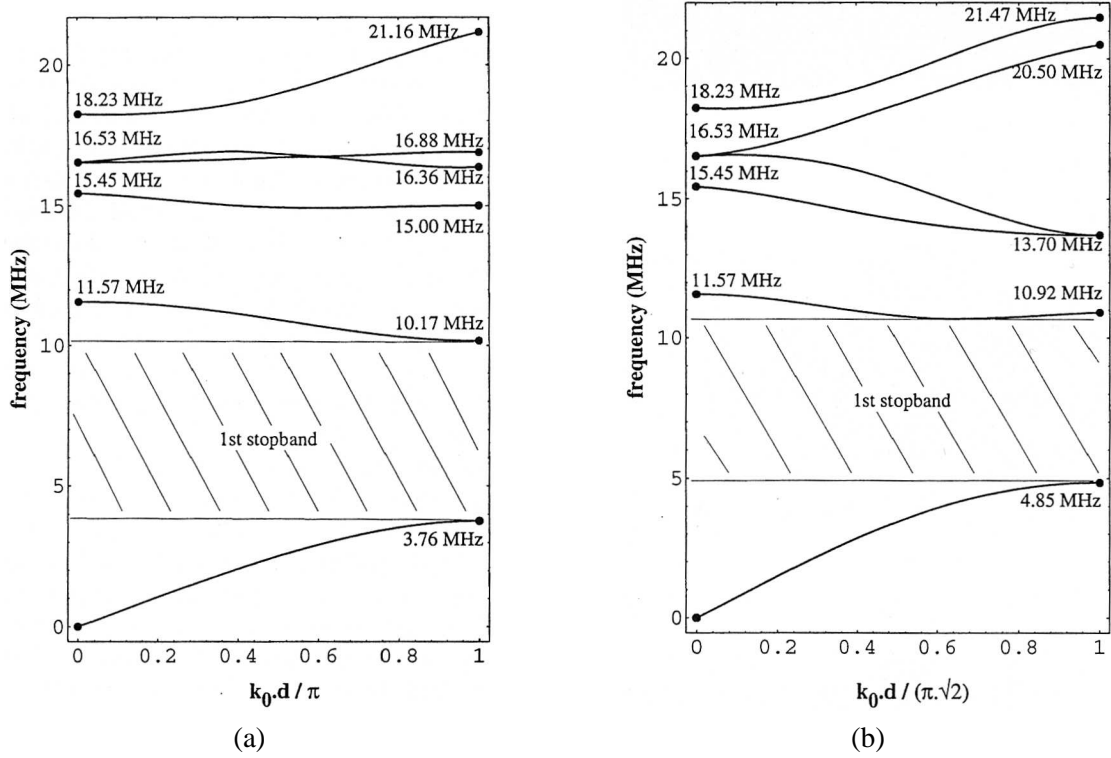


FIG. 6.2 – Courbes de dispersion des ondes transverses verticales se propageant suivant (a) l'axe x_1 et (b) la diagonale $x_2 = x_1$. D'après [28].

Remarque

Pour prendre en compte l'influence de la piézo-électricité sur la fréquence (modification des rigidités du matériau), on peut imaginer d'utiliser les constantes durcies [3] :

$$\bar{c}_{ijkl} = c_{ijkl}^E + \frac{(e_{pij} n_p)(e_{qkl} n_q)}{\varepsilon_{jk}^S n_j n_k}, \quad (6.19)$$

où \mathbf{n} est la direction de propagation de l'onde plane. Il ne s'agit cependant que d'une amélioration minimale qui ne donne pas plus d'informations sur les modes, en particulier sur le champ électrique.

6.2 Méthode de développement en ondes planes étendue

Dans le cas d'une structure bi-périodique, si on applique directement le développement en ondes planes aux équations constitutives combinées avec les équations d'équilibre, on arrive à un système du type :

$$[A_0 + k_3 A_1 + k_3^2 A_2] (\mathbf{u}) = 0, \quad (6.20)$$

où k_3 est la composante du vecteur d'onde suivant la normale au plan de la structure et \mathbf{u} est le vecteur $(u_1, u_2, u_3, \phi)^T$. A_i sont des matrices de taille $4L$ si on prend L termes dans les développements en série. On peut recourir à une transformation, répandue chez les mécaniciens, pour écrire un système aux valeurs propres classique du type :

$$\left[\begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & -A_2 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ k_3 \mathbf{u} \end{pmatrix} = 0. \quad (6.21)$$

Toutefois, l'expression des matrices A_i n'est pas immédiate et peut se révéler particulièrement difficile et délicate à établir dans le cas général. On préfère à cette approche "brutale" la formulation de la méthode Fahmy-Adler [64, 65], qui apporte une notation claire et compacte ainsi que la possibilité non négligeable (et même fondamentale) d'appliquer des conditions aux limites presque immédiatement.

6.2.1 Formulation matricielle

On considère des structures périodiques uni-, bi- voire tri-dimensionnelles. Suivant le théorème de Floquet rappelé précédemment (voir Eq. (5.31)), tout champ de l'espace, comme les déplacements ou encore les contraintes, peuvent se développer sous la forme de séries dites de Bloch-Floquet :

$$h(\mathbf{r}, t) = \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \sum_{\mathbf{G}} h^{\mathbf{k}+\mathbf{G}} \exp(-j \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (6.22)$$

où \mathbf{k} est le vecteur d'onde (sans restriction dans l'espace) et \mathbf{G} sont les vecteurs du réseau réciproque (voir Sect. C).

Les constantes matériaux sont comme précédemment développées en séries de Fourier :

$$\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \alpha^{\mathbf{G}} \exp(-j \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (6.23)$$

avec $\alpha = \{\rho, c_{ijkl}^E, e_{ijk}, \epsilon_{ij}^S\}$. Les termes $\alpha^{\mathbf{G}}$ sont calculés en fonction de la forme de la cellule élémentaire et facilement accessibles pour des formes simples. Leur expression est discutée Sect. 6.2.2 dans le cas des composites bi-périodiques.

Par commodité de notation, on définit le vecteur des déplacements généralisés $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \phi)^T$ et les vecteurs des contraintes généralisées $\mathbf{t}_i = (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3}, D_i)^T$.

On réécrit les équations constitutives (4.17) et (4.18) en utilisant les développements en séries de Fourier pour les constantes matériau et en séries de Bloch-Floquet pour les champs. On obtient :

$$\sum_{\mathbf{G}'} T_{ij}^{\mathbf{k}+\mathbf{G}'} e^{-j \mathbf{G}' \cdot \mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{G}} \sum_{\mathbf{G}'} \left[-j(k_l + G'_l)(c_{ijkl}^E)^{\mathbf{G}} u_k^{\mathbf{k}+\mathbf{G}'} + e_{lij}^{\mathbf{G}} u_4^{\mathbf{k}+\mathbf{G}'} \right] e^{-j(\mathbf{G}+\mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}}, \quad (6.24)$$

$$\sum_{\mathbf{G}'} D_i^{\mathbf{k}+\mathbf{G}'} e^{-j \mathbf{G}' \cdot \mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{G}} \sum_{\mathbf{G}'} \left[-j(k_l + G'_l)(e_{ikl}^{\mathbf{G}} u_k^{\mathbf{k}+\mathbf{G}'} - \epsilon_{il}^S u_4^{\mathbf{k}+\mathbf{G}'}) e^{-j(\mathbf{G}+\mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} \right], \quad (6.25)$$

où le ' est introduit pour différencier les sommes sur les vecteurs du réseau réciproque relatives aux champs de celles relatives aux propriétés matériau. Dans cette écriture, \mathbf{G} remplace \mathbf{G}_{mn} et \mathbf{G}' remplace \mathbf{G}_{pq} dans la mesure où cette formulation est valable quelle que soit la dimension du problème.

Comme précédemment, on utilise les propriétés d'orthogonalité de la base des fonctions trigonométriques pour éliminer la dépendance spatiale des contraintes et du déplacement électrique. Le changement de variables ($\mathbf{G}'' = \mathbf{G} + \mathbf{G}'$) est d'abord effectué, puis on réalise la projection sur la base des fonctions trigonométriques en multipliant par $e^{j \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}$ et en intégrant sur la cellule élémentaire. Les contraintes et le déplacement électrique sont alors donnés pour tout \mathbf{G} par :

$$T_{ij}^{\mathbf{k}+\mathbf{G}} = \sum_{\mathbf{G}'} \left[-j(k_l + G'_l)(c_{ijkl}^E)^{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} u_k^{\mathbf{k}+\mathbf{G}'} + e_{lij}^{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} u_4^{\mathbf{k}+\mathbf{G}'} \right], \quad (6.26)$$

et

$$D_i^{k+G} = \sum_{G'} \left[-j(k_l + G'_l) (e_{ikl}^{G-G'} u_k^{k+G'} - \epsilon_{il}^{S^{G-G'}} u_4^{k+G'}) \right]. \quad (6.27)$$

De ces deux expressions sont déduits les vecteurs des contraintes généralisées pour tout G :

$$j t_i^{k+G} = \sum_{G'} (k_l + G'_l) A_{il}^{G-G'} u^{k+G'} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.28)$$

où :

$$\begin{aligned} A_{il}^G(j, k) &= c_{ijkl}^E \quad G, \\ A_{il}^G(j, 4) &= e_{lij}^G, \\ A_{il}^G(4, k) &= e_{ikl}^G, \\ A_{il}^G(4, 4) &= -\epsilon_{il}^{S^G}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

avec $(j, k) \in [1, 3]^2$.

On procède de même avec l'équation fondamentale de la dynamique (4.22) et l'équation de Poisson (4.23), qui deviennent :

$$\sum_{G'} -j(k_i + G'_i) T_{ij}^{k+G'} e^{-j G' \cdot r} = \sum_G \sum_{G'} \left[\rho^G (j\omega)^2 u_j^{k+G'} e^{-j(G+G') \cdot r} \right], \quad (6.30)$$

$$\sum_{G'} -j(k_i + G'_i) D_i^{k+G'} e^{-j G' \cdot r} = 0. \quad (6.31)$$

Après projection orthogonale, on obtient une deuxième relation entre les vecteurs des contraintes généralisées et les déplacements généralisés pour tout G :

$$(k_i + G_i) j t_i^{k+G} = \sum_{G'} \omega^2 R^{G-G'} u^{k+G'}, \quad (6.32)$$

où :

$$R^{G-G'} = \rho^{G-G'} \hat{I} = \rho^{G-G'} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Dans les calculs numériques, on doit prendre pour les séries de Fourier et Bloch-Floquet un nombre de termes suffisant pour assurer la convergence. Si on suppose que l'on choisit L harmoniques spatiales dans les développements, on définit les notations suivantes pour les contraintes généralisées et les déplacements généralisés :

$$\tilde{T}_i^k = \begin{pmatrix} t_i^{k+G^1} \\ \vdots \\ t_i^{k+G^L} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{U}^k = \begin{pmatrix} u^{k+G^1} \\ \vdots \\ u^{k+G^L} \end{pmatrix}. \quad (6.34)$$

De même on définit les matrices \tilde{A}_{ij} et \tilde{R} par :

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij}^0 & A_{ij}^{G^1-G^2} & \dots & A_{ij}^{G^1-G^L} \\ A_{ij}^{G^2-G^1} & A_{ij}^0 & \dots & A_{ij}^{G^2-G^L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ij}^{G^L-G^1} & A_{ij}^{G^L-G^2} & \dots & A_{ij}^0 \end{bmatrix}, \quad (6.35)$$

et

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \rho^0 \hat{I} & \rho^{G^1-G^2} \hat{I} & \dots & \rho^{G^1-G^L} \hat{I} \\ \rho^{G^2-G^1} \hat{I} & \rho^0 \hat{I} & \dots & \rho^{G^2-G^L} \hat{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{G^L-G^1} \hat{I} & \rho^{G^L-G^2} \hat{I} & \dots & \rho^0 \hat{I} \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

Enfin on introduit les matrices diagonales Γ_i ($i = 1, 2, 3$) dont les termes sont issus des dérivées spatiales :

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} (k_i + G_i^1) I_d & & & 0 \\ & (k_i + G_i^2) I_d & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (k_i + G_i^L) I_d \end{bmatrix}, \quad (6.37)$$

où I_d est la matrice identité de taille 4. Les équations (6.28) et (6.32) peuvent alors se résumer à une forme très compacte donnée par :

$$j \tilde{T}_i^k = \tilde{A}_{ij} \Gamma_j \tilde{U}^k \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.38)$$

$$\omega^2 \tilde{R} \tilde{U}^k = \Gamma_i (j \tilde{T}_i^k). \quad (6.39)$$

Ces équations sont valables quels que soient la dimension de la périodicité, la forme de la cellule élémentaire et ce qui la compose, et le système d'axes utilisé. \tilde{A}_{ij} contient les constantes de rigidité, piézo-électriques et diélectriques des matériaux qui sont présents dans le composite. \tilde{R} contient les masses volumiques. Γ_i représente la dérivation spatiale. Enfin ce système est construit sans aucune restriction sur le vecteur d'onde \mathbf{k} , autrement dit l'onde traverse la structure avec une incidence quelconque. A partir de ces équations, on construit le système à résoudre suivant le problème traité.

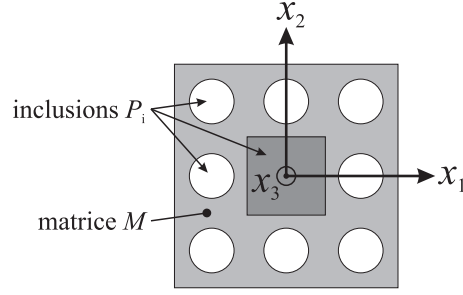
6.2.2 Composites bi-périodiques

Description des cellules

L'exploitation du modèle de développement en ondes planes requiert de déterminer les valeurs des composantes spectrales $\alpha^G = \{\rho^G, c_{ijkl}^G, e_{ijk}^G, \varepsilon_{ij}^G\}$ des constantes matériaux. Cela revient à décrire la cellule élémentaire du réseau. Considérons la cellule de la figure 6.3.

Elle est composée de plusieurs inclusions, dénotées P_i (avec i le numéro de l'inclusion), de natures différentes (matériau, forme, taille). L'intérêt de faire varier la taille, la forme et le matériau des inclusions est de jouer sur la taille et la localisation des bandes d'arrêt et notamment d'y permettre la propagation de modes guidés.

Considérant l'inclusion P_i , toute constante matériau α s'écrit comme une série de Fourier et les compo-


 FIG. 6.3 – Exemple de cellule élémentaire d'un réseau composée d'inclusions P_i dans une matrice M .

santes spectrales s'écrivent :

$$\alpha^{\mathbf{G}} = \frac{1}{S} \iint_{\text{cellule}} \alpha(\mathbf{r}) \exp(j \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) d^2 \mathbf{r}, \quad (6.40)$$

soit [68] :

$$\begin{cases} \alpha^{\mathbf{G}} = \bar{\alpha} = \alpha_{P_i} f_i + \alpha_M (1 - f_i) = \alpha_M + (\alpha_{P_i} - \alpha_M) f_i & \text{si } \mathbf{G} = 0 \\ \alpha^{\mathbf{G}} = (\alpha_{P_i} - \alpha_M) F_i(\mathbf{G}) e^{j \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}_i} & \text{si } \mathbf{G} \neq 0 \end{cases} \quad (6.41)$$

S est la surface de la cellule élémentaire. f_i est la fraction volumique de l'inclusion P_i dans la matrice M , F_i est son facteur de structure et \mathbf{r}_i sa position dans la cellule élémentaire. Enfin, α_{P_i} et α_M sont les valeurs de la constante matériau α pour l'inclusion P_i et la matrice M respectivement. Les termes spectraux s'écrivent encore :

$$\alpha^{\mathbf{G}} = \alpha_M \delta_{\mathbf{G} \mathbf{0}} + (\alpha_{P_i} - \alpha_M) F_i(\mathbf{G}) e^{j \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}_i}. \quad (6.42)$$

Le facteur de structure $F_i(\mathbf{G})$ se réduit à la fraction volumique f_i lorsque \mathbf{G} vaut zéro. $\delta_{\mathbf{G} \mathbf{0}}$ est le symbole de Kronecker tel que $\delta_{\mathbf{G} \mathbf{0}} = 1$ si $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ et $\delta_{\mathbf{G} \mathbf{0}} = 0$ sinon.

Dans le cas général où l'on a N inclusions P_i dans une cellule élémentaire, les termes des séries de Fourier des constantes matériaux deviennent :

$$\alpha^{\mathbf{G}} = \alpha_M \delta_{\mathbf{G} \mathbf{0}} + \sum_{i=1}^N (\alpha_{P_i} - \alpha_M) F_i(\mathbf{G}) e^{j \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}_i}. \quad (6.43)$$

A ce stade, il reste deux éléments à déterminer : les valeurs des vecteurs du réseau réciproque \mathbf{G} et les valeurs du facteur de structure $F_i(\mathbf{G})$. Les vecteurs du réseau réciproque dépendent de la forme de la structure périodique, i.e. de la maille équivalente (voir section C). Ils sont construits à partir des vecteurs de base du réseau réciproque.

Pour un réseau rectangulaire/carré, les vecteurs du réseau réciproque s'écrivent :

$$\mathbf{G} = \left(\frac{2\pi m}{d_1}, \frac{2\pi n}{d_2}, 0 \right)^T, \quad (6.44)$$

où d_1 est le côté suivant l'axe x_1 et d_2 celui suivant l'axe x_2 . Les réseaux direct et réciproque sont représentés sur la figure 6.4.

Considérons maintenant le réseau hexagonal de la figure 6.5a. La cellule a pour côté d . On prend pour

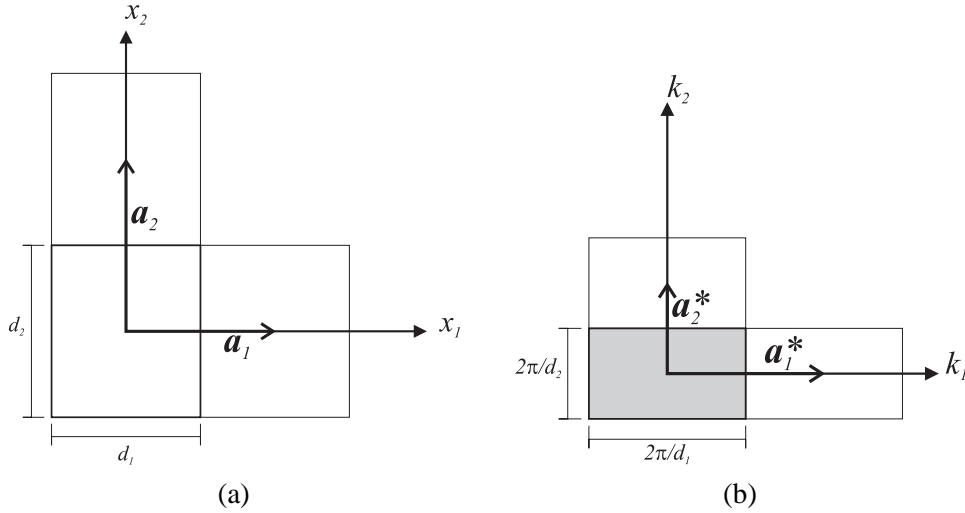


FIG. 6.4 – Structure rectangulaire : (a) réseau direct et (b) réseau réciproque. La zone grisée représente la première zone de Brillouin dans le réseau réciproque.

vecteurs de base du réseau direct dans le système d'axes choisi :

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}d}{2}, \frac{3d}{2}, 0 \right)^T \text{ et } \mathbf{a}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}d}{2}, -\frac{3d}{2}, 0 \right)^T. \quad (6.45)$$

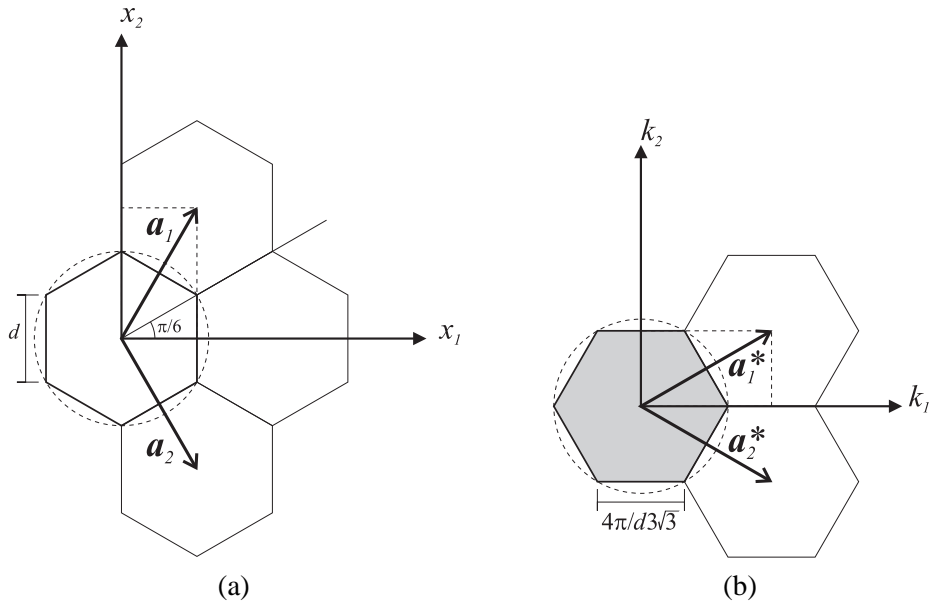


FIG. 6.5 – Structure hexagonale : (a) réseau direct et (b) réseau réciproque.

Les vecteurs de base du réseau réciproque sont alors (cf section C) :

$$\mathbf{a}_1^* = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}d}, \frac{2\pi}{3d}, 0 \right)^T \text{ et } \mathbf{a}_2^* = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}d}, -\frac{2\pi}{3d}, 0 \right)^T. \quad (6.46)$$

Le réseau réciproque est aussi un réseau hexagonal, tourné de $\pi/6$ par rapport au réseau direct. La première

zone de Brillouin apparaît en gris sur la figure 6.5b. Les vecteurs du réseau réciproque \mathbf{G} sont dans ce cas :

$$\mathbf{G} = m \mathbf{a}_1^* + n \mathbf{a}_2^* \quad (6.47)$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}d}(m+n), \frac{2\pi}{3d}(m-n), 0 \right)^T \quad (6.48)$$

On a traité ici deux cas particuliers que sont les réseaux rectangulaires et hexagonaux. Le cas général d'un réseau bi-périodique se traite de la même façon [33].

Reste maintenant à déterminer le facteur de structure $F_i(\mathbf{G})$ pour chaque inclusion P_i . Pour un réseau bidimensionnel, celui-ci détermine la forme et la taille de la section de l'inclusion (rectangulaire, carrée, carrée tournée, circulaire, etc.). Il est défini par :

$$F_i(\mathbf{G}) = \frac{1}{S} \iint_{P_i} \exp(j \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}'. \quad (6.49)$$

L'intégrale est prise pour l'inclusion P_i centrée sur l'origine ($\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$).

On donne ici quelques résultats bien connus. Pour un carré de côtés l parallèles aux axes (carré non tourné), le facteur de structure s'écrit :

$$F_i(\mathbf{G}) = f_i \operatorname{sinc} \left(G_1 \frac{l}{2} \right) \operatorname{sinc} \left(G_2 \frac{l}{2} \right), \quad (6.50)$$

avec $f_i = l^2/S$ (et $0 \leq f_i \leq 1$ pour un réseau carré). Si on tourne le carré de 45 degrés, il devient :

$$F_i(\mathbf{G}) = f_i \operatorname{sinc} \left((G_1 + G_2) \frac{l}{2\sqrt{2}} \right) \operatorname{sinc} \left((-G_1 + G_2) \frac{l}{2\sqrt{2}} \right), \quad (6.51)$$

avec toujours $f_i = l^2/S$ (mais $0 \leq f_i \leq \frac{1}{2}$ si le réseau est carré).

Enfin le dernier exemple est une section circulaire de rayon r_0 :

$$F_i(\mathbf{G}) = 2 f_i \frac{J_1(|\mathbf{G}| r_0)}{|\mathbf{G}| r_0}, \quad (6.52)$$

avec $f_i = \pi r_0^2/S$. J_1 est la fonction de Bessel de première espèce et de premier ordre. Dans un réseau carré, la fraction volumique f_i est inférieure ou égale à $\frac{\pi}{4} \cong 0,785$, dans un réseau hexagonal à $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cong 0,907$.

On dispose maintenant de tous les éléments pour décrire une cellule élémentaire complexe, en choisissant d'abord sa forme et sa taille, puis en y disposant les inclusions. Chacune d'elles est définie par sa position \mathbf{r}_i , sa dimension caractéristique (côté, rayon, etc.), sa forme et son matériau.

Composites d'épaisseur infinie : propagation quelconque

Dans la section 6.2.1, on a établi deux systèmes d'équation (6.38) et (6.39) sans aucune perte de généralité, que ce soit sur la valeur du vecteur d'onde \mathbf{k} ou la dimension de la périodicité.

On se place ici dans le cas d'un composite bipériodique d'épaisseur infinie, comme illustré sur la figure 6.6.

L'approche couramment utilisée consiste à se placer dans le plan du réseau (plan normal aux axes des inclusions) et à considérer les ondes se propageant dans ce plan (cf figure 6.6(a)). Autrement dit, la composante normale k_3 du vecteur d'onde \mathbf{k} est supposée nulle.

Or les modes de plaque par exemple sont le résultat d'interférences constructives entre les multiples

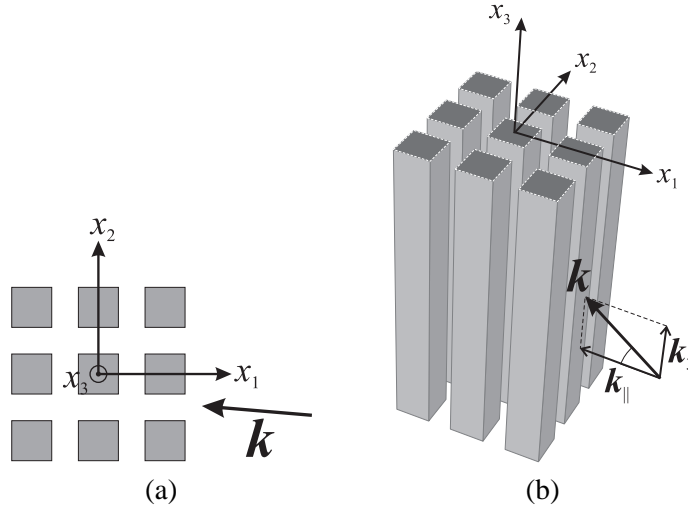


FIG. 6.6 – Composite composé de barreaux infinis de section carrée dans une matrice. Une onde de vecteur d'onde \mathbf{k} se propage (a) dans le plan du réseau (x_1, x_2) , (b) avec une incidence non-nulle par rapport au même plan.

réflexions d'une onde sur les deux faces de la plaque, l'onde se propageant avec une incidence non-nulle par rapport au plan de la plaque. Le mode d'épaisseur notamment ne peut être trouvé pour la seule valeur nulle de k_3 . Il est donc nécessaire de traiter également les valeurs de k_3 non-nulles.

A partir des deux systèmes (6.38) et (6.39), on peut immédiatement écrire :

$$\omega^2 \tilde{R} \tilde{U}^{\mathbf{k}} = \Gamma_i \tilde{A}_{ij} \Gamma_j \tilde{U}^{\mathbf{k}}. \quad (6.53)$$

Les composantes k_i du vecteur d'onde sont contenues dans les matrices Γ_i (cf équation (6.37)). On obtient un système aux valeurs propres en ω^2 dont le vecteur d'onde \mathbf{k} est un paramètre à fixer, et les vecteurs propres sont les déplacements généralisés.

On reconstruit les déplacements dans le réseau à partir des vecteurs propres du système. Les déplacements généralisés s'écrivent pour chaque valeur propre $\omega^{(r)}$:

$$\mathbf{u}^{(r)}(\mathbf{r}, t) = B^{(r)} e^{j(\omega^{(r)} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \sum_{l=1}^L e^{-j \mathbf{G}^l \cdot \mathbf{r}} \mathbf{u}^{\mathbf{k} + \mathbf{G}^l(r)}. \quad (6.54)$$

Les déplacements sont définis à un facteur multiplicatif $B^{(r)}$ près, suivant la normalisation des vecteurs propres utilisée par l'algorithme de résolution du système.

De (6.38) on peut remonter aux contraintes généralisées $\mathbf{t}_i^{\mathbf{k} + \mathbf{G}^l(r)}$ dans le domaine spectral, puis reconstruire le champ des contraintes $\mathbf{t}_i^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ comme on l'a fait pour les déplacements.

Application : On considère le cas d'un composite quartz/résine epoxy [69] dont une vue en coupe est présentée sur la figure 6.7(a). Les barreaux de quartz sont de section carrée de côté $d = 80 \mu\text{m}$. La cellule est également carrée de côté $a = 100 \mu\text{m}$, telle que la fraction volumique du quartz (d^2/a^2) est égale à 0,64.

La figure 6.8(a) représente les courbes de dispersion de la structure lorsque les ondes se propagent dans le plan du réseau, au même titre que la figure 6.2 dans le cas du composite PZT/résine. Alors que le cas précédent ne fait apparaître que les ondes transverses verticales, on obtient ici toutes les polarisations. La zone grise représente une bande d'arrêt *absolue* de la structure pour k_3 nulle. On dit qu'elle est absolue dans le sens où elle existe quelle que soit la nature des modes, contrairement à la bande d'arrêt de la figure 6.2

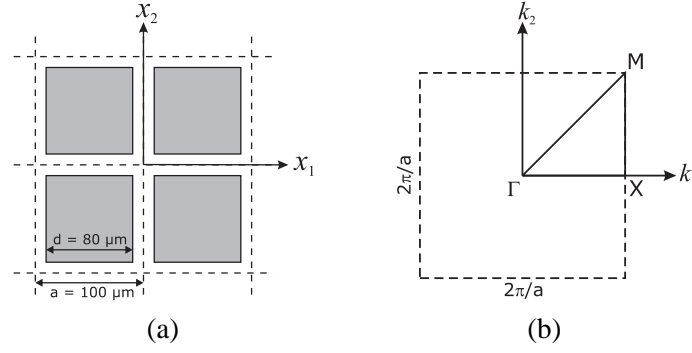


FIG. 6.7 – (a) Structure du composite composé de barreaux de quartz de section carrée enrobés d'une résine époxy. (b) Première zone de Brillouin dans le plan (k_1, k_2) .

qui n'est valable que pour les modes transverses verticaux. Dans la gamme de fréquences définie par cette bande d'arrêt, aucune onde n'est susceptible de se propager au travers du réseau. Pour le chemin $\Gamma - X$ (propagation le long de x_1), les polarisations des modes 1 à 3 sont respectivement transverse verticale (déplacements suivant x_3), transverse horizontale (déplacements suivant x_2) et longitudinale (déplacements suivant x_1). Le quatrième mode consiste en une rotation des barreaux dans la matrice autour de leurs axes respectifs.

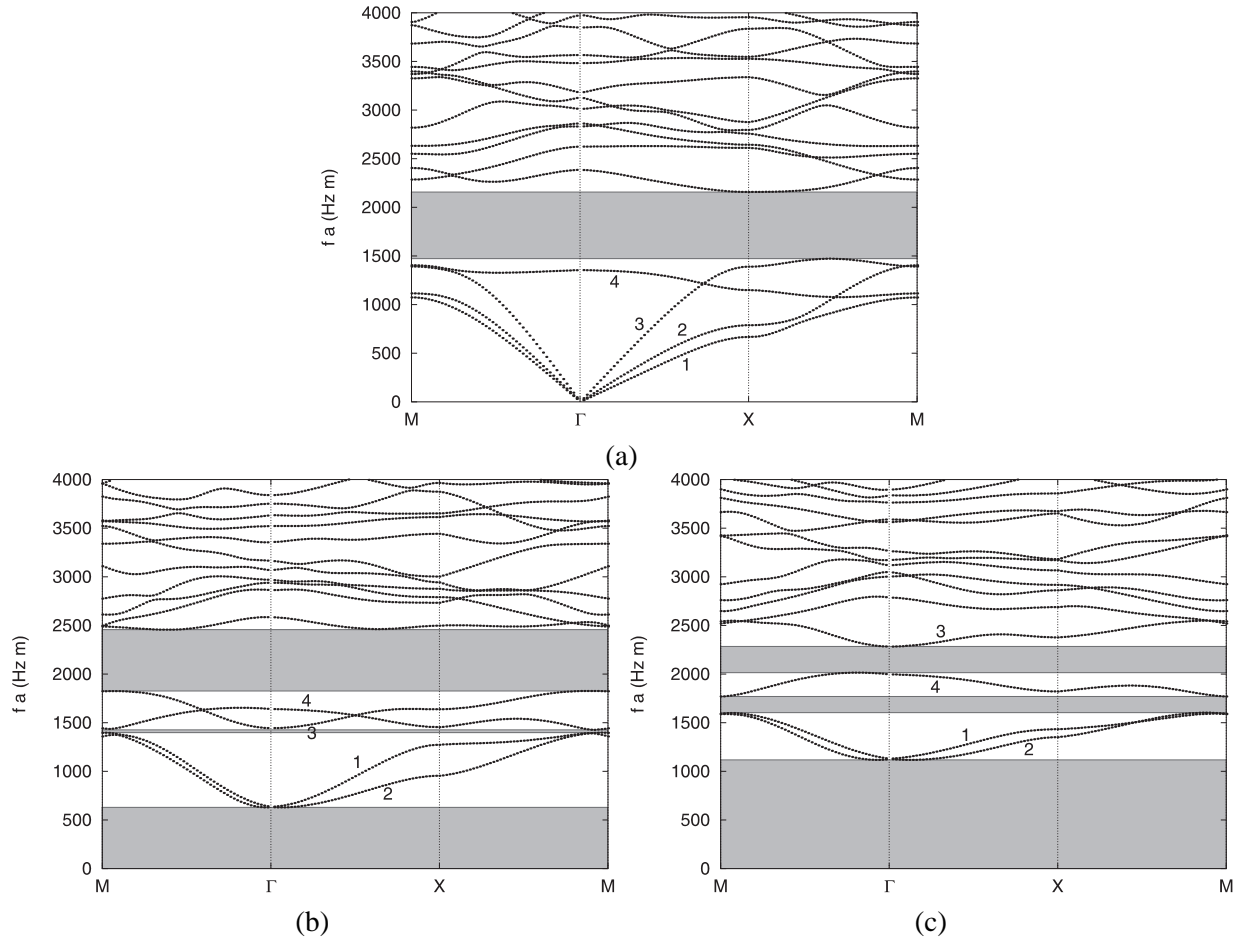


FIG. 6.8 – Courbes de dispersion le long du chemin $M - \Gamma - X - M$ représenté sur la figure 6.7(b), pour (a) $k_3 a / 2\pi = 0$, (b) $k_3 a / 2\pi = 0,25$, et (c) $k_3 a / 2\pi = 0,4$. Les quatre premières branches sont numérotées dans leur ordre d'apparition sur le premier diagramme.

Enfin, les figures 6.8(b)-(c) représentent les mêmes courbes de dispersion pour deux valeurs non-nulles

de la composante normale k_3 du vecteur d'onde. Globalement, on observe un déplacement des modes en fréquence, accompagné de l'apparition de nouvelles bandes d'arrêt. Les positions successives des branches 1 à 4 dans le chemin $\Gamma - X$ sont indiquées. Le mode 3, de polarisation longitudinale, est à l'origine du mode d'épaisseur d'une plaque, lorsque la composante k_3 a une valeur suffisamment grande devant $|\mathbf{k}_{||}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. On se reportera à la section 7.2.2 pour une analyse approfondie d'un composite 1-3 à l'aide de cette démarche.

Composites d'épaisseur finie et semi-infinie

Système aux valeurs propres Afin de résoudre complètement le problème d'un composite d'épaisseur finie (cas d'une plaque) ou semi-infinie, il est nécessaire d'appliquer des conditions aux limites à la surface. Celles-ci portant sur les déplacements (généralisés) et sur les contraintes normales (généralisées) à la (les) surface(s), on cherche à isoler comme inconnues du problème $\tilde{\mathbf{U}}^k$ et $\tilde{\mathbf{T}}_3^k$ en prenant l'axe x_3 normal au plan du réseau et conséquemment à la surface.

Dans un premier temps on suit rigoureusement la méthode Fahmy-Adler. (6.38) donne pour ($i = 3$) :

$$\tilde{A}_{33} \Gamma_3 \tilde{\mathbf{U}}^k = j \tilde{\mathbf{T}}_3^k - \left(\sum_{j=1,2} \tilde{A}_{3j} \Gamma_j \right) \tilde{\mathbf{U}}^k, \quad (6.55)$$

$$\Gamma_3 \tilde{\mathbf{U}}^k = \tilde{A}_{33}^{-1} \left[j \tilde{\mathbf{T}}_3^k - \left(\sum_{j=1,2} \tilde{A}_{3j} \Gamma_j \right) \tilde{\mathbf{U}}^k \right]. \quad (6.56)$$

(6.39) se réécrit :

$$\Gamma_3 (j \tilde{\mathbf{T}}_3^k) = \omega^2 \tilde{R} \tilde{\mathbf{U}}^k - \sum_{i=1,2} \Gamma_i (j \tilde{\mathbf{T}}_i^k), \quad (6.57)$$

$$= \omega^2 \tilde{R} \tilde{\mathbf{U}}^k - \sum_{i,j=1,2} \Gamma_i \tilde{A}_{ij} \Gamma_j \tilde{\mathbf{U}}^k - \left(\sum_{i=1,2} \Gamma_i \tilde{A}_{i3} \right) \Gamma_3 \tilde{\mathbf{U}}^k, \quad (6.58)$$

$$(\text{en utilisant (6.38)}) \quad (6.59)$$

$$= \left[\omega^2 \tilde{R} - \sum_{i,j=1,2} \Gamma_i \tilde{A}_{ij} \Gamma_j \right] \tilde{\mathbf{U}}^k - \left(\sum_{i=1,2} \Gamma_i \tilde{A}_{i3} \right) \tilde{A}_{33}^{-1} \times \left[j \tilde{\mathbf{T}}_3^k - \left(\sum_{j=1,2} \tilde{A}_{3j} \Gamma_j \right) \tilde{\mathbf{U}}^k \right]. \quad (6.60)$$

$$(\text{en utilisant (6.56)}) \quad (6.61)$$

On peut alors définir une matrice F telle que :

$$F \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^k \\ \tilde{\mathbf{T}}_3^k \end{pmatrix} = \Gamma_3 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^k \\ \tilde{\mathbf{T}}_3^k \end{pmatrix} \quad (6.62)$$

avec :

$$F_{11} = -\tilde{A}_{33}^{-1} \left(\sum_{j=1,2} \tilde{A}_{3j} \Gamma_j \right) \quad (6.63)$$

$$F_{12} = \tilde{A}_{33}^{-1} \quad (6.64)$$

$$F_{21} = \omega^2 \tilde{R} - \sum_{i,j=1,2} \Gamma_i \tilde{A}_{ij} \Gamma_j + \left(\sum_{i=1,2} \Gamma_i \tilde{A}_{i3} \right) \tilde{A}_{33}^{-1} \left(\sum_{j=1,2} \tilde{A}_{3j} \Gamma_j \right) \quad (6.65)$$

$$F_{22} = - \left(\sum_{i=1,2} \Gamma_i \tilde{A}_{i3} \right) \tilde{A}_{33}^{-1} \quad (6.66)$$

Cette formulation nécessite l'inversion de la matrice \tilde{A}_{33} avant toute résolution d'un système aux valeurs propres. Etant donnée la grande taille des matrices, directement liée aux nombres d'harmoniques dans les développements en séries, on préfère éviter toute inversion de matrice. Dans cette optique, on adopte une procédure similaire à celle de Peach [70] qui consiste à construire et résoudre un système aux valeurs propres généralisé.

A partir des relations (6.55) et (6.58), on peut écrire le système équivalent suivant :

$$\begin{bmatrix} \omega^2 \tilde{R} - \sum_{i,j=1,2} \Gamma_i \tilde{A}_{ij} \Gamma_j & 0 \\ -\sum_{j=1,2} \tilde{A}_{3j} \Gamma_j & I_d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{\mathbf{k}} \\ j \tilde{\mathbf{T}}_3^{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1,2} \Gamma_i \tilde{A}_{i3} \right) \Gamma_3 & \Gamma_3 \\ \tilde{A}_{33} \Gamma_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{\mathbf{k}} \\ j \tilde{\mathbf{T}}_3^{\mathbf{k}} \end{pmatrix}. \quad (6.67)$$

Dans le cas d'un composite bi-périodique, les composantes G_3^l des vecteurs du réseau réciproque \mathbf{G}^l sont nulles. La matrice Γ_3 devient alors :

$$\Gamma_3 = k_3 I_d^L, \quad (6.68)$$

où I_d^L est la matrice identité de taille $4 \times L$. On obtient alors un système aux valeurs propres du type ($Ax = \lambda Bx$) :

$$\begin{bmatrix} \omega^2 \tilde{R} - B & 0 \\ -C2 & I_d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{\mathbf{k}} \\ j \tilde{\mathbf{T}}_3^{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = k_3 \begin{bmatrix} C1 & I_d \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{\mathbf{k}} \\ j \tilde{\mathbf{T}}_3^{\mathbf{k}} \end{pmatrix}, \quad (6.69)$$

avec :

$$B = \sum_{i,j=1,2} \Gamma_i \tilde{A}_{ij} \Gamma_j, \quad (6.70)$$

$$C1 = \sum_{i=1,2} \Gamma_i \tilde{A}_{i3}, \quad (6.71)$$

$$C2 = \sum_{j=1,2} \tilde{A}_{3j} \Gamma_j, \quad (6.72)$$

$$D = \tilde{A}_{33}. \quad (6.73)$$

La résolution du système donne $8L$ vecteurs propres $(\tilde{\mathbf{U}}^{\mathbf{k}^{(r)}}, \tilde{\mathbf{T}}_3^{\mathbf{k}^{(r)}})^T$ associés aux valeurs propres $k_3^{(r)}$. Ils constituent la base des modes partiels de la structure composite sur laquelle se décompose les vecteurs des champs de déplacements et de contraintes normales généralisés $(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{t}_3(\mathbf{r}, t))^T$. On introduit les $8L$ amplitudes relatives $A^{(r)}$ des modes partiels dont les valeurs sont obtenues en appliquant les conditions aux limites. Ces amplitudes relatives vont servir à donner un sens physique aux amplitudes des champs de déplacements et de contraintes normales, fixées arbitrairement lors de la résolution du problème aux valeurs

propres. Les champs reconstruits s'expriment suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{t}_3(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = e^{j(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)} \sum_{l=1}^L \left[e^{-j \mathbf{G}^l \cdot \mathbf{r}} \sum_{r=1}^{8L} A^{(r)} e^{-j k_3^{(r)} x_3} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{\mathbf{k} + \mathbf{G}^l(r)} \\ \mathbf{t}_3^{\mathbf{k} + \mathbf{G}^l(r)} \end{pmatrix} \right]. \quad (6.74)$$

De plus, il est possible de prendre en compte les pertes intrinsèques aux matériaux en les décrivant par des constantes complexes dont la partie imaginaire représente les pertes.

Conditions aux limites Une large variété de conditions aux limites (mécaniques et électriques) peuvent être appliquées pour simuler les conditions de fonctionnement réel d'une structure piézocomposite.

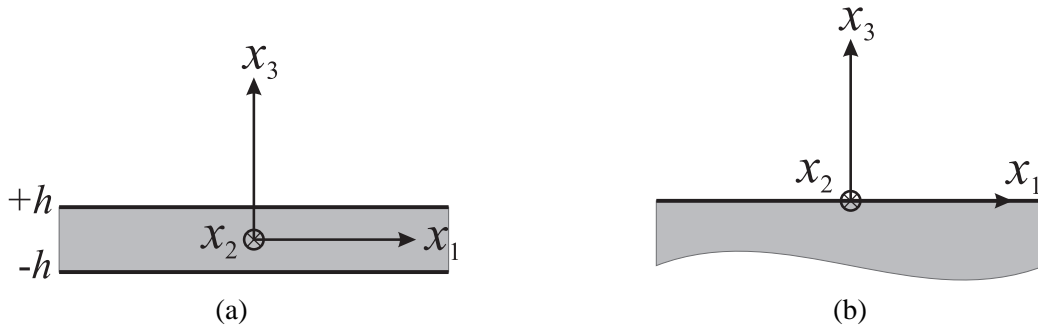


FIG. 6.9 – Représentation (a) d'un composite de type plaque et (b) d'un composite semi-infini dans le système d'axes choisi.

Pour une plaque ou un composite semi-infini (cf figure 6.9) fonctionnant dans l'air ou le vide (surfaces libres de contraintes), les conditions aux limites mécaniques imposent la nullité des contraintes normales. Les conditions de surfaces libres sont écrites indépendamment des coordonnées spatiales x_1 et x_2 en réalisant une projection sur la base des fonctions trigonométriques comme on l'a fait précédemment pour construire le système algébrique.

D'après (6.74) la nullité des contraintes normales (au plan (x_1, x_2)) entraînent :

$$T_{i3}(\mathbf{r}, t) = e^{j(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)} \sum_{l=1}^L \left[e^{-j \mathbf{G}^l \cdot \mathbf{r}} \sum_{r=1}^{8L} A^{(r)} e^{-j k_3^{(r)} x_3} T_{i3}^{\mathbf{k} + \mathbf{G}^l(r)} \right] = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.75)$$

Après simplification et projection, on obtient un ensemble de conditions aux limites :

$$\sum_{r=1}^{8L} A^{(r)} e^{-j k_3^{(r)} h} T_{i3}^{\mathbf{k} + \mathbf{G}^l(r)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \text{ et } l = 1, \dots, L), \quad (6.76)$$

où $x_3 = h$ à la surface considérée.

Notons que l'accès immédiat aux contraintes normales, qui permet d'imposer les conditions aux limites mécaniques (contraintes normales nulles dans le cas de surfaces libres ou plus généralement continuité des contraintes normales), est rendu possible grâce à la formulation de Fahmy-Adler, dans laquelle les contraintes normales font partie des variables indépendantes du problème.

En considérant les deux surfaces d'une plaque, les conditions aux limites mécaniques apportent $6L$ équations pour $8L$ inconnues $A^{(r)}$.

Du point de vue électrique, deux types de conditions aux limites ont été considérés. Le premier est la continuité du potentiel et de la composante normale du déplacement électrique en tout point de la surface.

Cela correspond à la condition dite de *surface libre*, autrement dit d'une surface non métallisée (nullité de la charge en tout point de la surface). Dans l'air (ou le vide), on peut écrire :

$$\Delta \phi^{air} = 0, \quad (6.77)$$

$$D_3^{air} = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi^{air}}{\partial x_3}, \quad (6.78)$$

où Δ est le Laplacien. Les conditions de continuité à la surface induisent :

$$\phi^{substrat} \Big|_{x_3=h} = \phi^{air} \Big|_{x_3=h}, \quad (6.79)$$

$$D_3^{substrat} \Big|_{x_3=h} - D_3^{air} \Big|_{x_3=h} = 0. \quad (6.80)$$

Après quelques calculs, on obtient l'expression des conditions aux limites électriques :

$$\sum_{r=1}^{8L} A^{(r)} e^{-j k_3^{(r)} h} \left[D_3^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(r)} - \text{sign} \epsilon_0 |\kappa|_{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l} \phi^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(r)} \right] = 0 \quad (l = 1, \dots, L), \quad (6.81)$$

avec :

$$|\kappa|_{\mathbf{k}+\mathbf{G}} = \sqrt{(k_1 + G_1)^2 + (k_2 + G_2)^2}, \quad (6.82)$$

et :

$$\text{sign} = \begin{cases} +1 & \text{si } x_3 \text{ est sortant,} \\ -1 & \text{si } x_3 \text{ est rentrant.} \end{cases} \quad (6.83)$$

Le deuxième type de conditions aux limites électriques est la condition dite de *surface métallisée*. Autrement dit on fixe le potentiel à la surface considérée métallisée. Afin d'obtenir les conditions les plus simples, on fixe le potentiel à zéro pour lequel nous nous trouvons dans le cas de conditions aux limites en court-circuit. On a immédiatement l'ensemble de conditions :

$$\sum_{r=1}^{8L} A^{(r)} e^{-j k_3^{(r)} h} \phi^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(r)} = 0 \quad (l = 1, \dots, L), \quad (6.84)$$

à la surface ($x_3 = h$).

Ces deux types de conditions correspondent aux conditions de résonance et d'antirésonance particulièrement utiles pour caractériser les conditions d'excitation, notamment le couplage, des modes de vibration d'un dispositif réel.

Dans les deux cas on obtient $2L$ conditions aux limites électriques, soit en tout $8L$ équations pour les $8L$ amplitudes relatives $A^{(r)}$ à déterminer, dans le cas d'une plaque. Les modes de la structure correspondent aux zéros du déterminant du système formé par les $8L$ conditions aux limites homogènes. Le système admet une solution non triviale lorsque son déterminant est nul. On peut réécrire l'expression des champs (6.74) suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{t}_3(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = e^{j(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)} \sum_{l=1}^L \left[e^{-j \mathbf{G}^l \cdot \mathbf{r}} F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l} \Delta(x_3) \mathbf{A} \right], \quad (6.85)$$

où $F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l}$ sont des matrices $8 \times 8L$ contenant les vecteurs propres telles que :

$$F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(1)} & \dots & \mathbf{u}^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(8L)} \\ \mathbf{t}_3^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(1)} & \dots & \mathbf{t}_3^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(8L)} \end{bmatrix}, \quad (6.86)$$

$\Delta(x_3)$ est une matrice diagonale contenant les valeurs propres telle que :

$$\Delta(x_3) = \begin{bmatrix} e^{-j k_3^{(1)} x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j k_3^{(8L)} x_3} \end{bmatrix}, \quad (6.87)$$

et $\mathbf{A} = (A^{(1)} \dots A^{(8L)})^T$ est le vecteur des amplitudes relatives.

On considère une plaque d'épaisseur $2h$ dont les surfaces se situent à $x_3 = \pm h$. En utilisant la notation compacte (6.85) des champs, la condition de surfaces métallisées (en court-circuit) s'écrit :

$$\det \begin{bmatrix} [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(h)](5:7,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(h)](4,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(-h)](5:7,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(-h)](4,:) \\ \vdots \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(h)](5:7,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(h)](4,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(-h)](5:7,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(-h)](4,:) \end{bmatrix} = 0, \quad (6.88)$$

où $[M](5:7,:)$ signifie que l'on prend les lignes 5 à 7 de la matrice M et toutes ses colonnes. La condition de surfaces libres devient :

$$\det \begin{bmatrix} [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(h)](5:7,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(h)](8,:) - \epsilon_0 |\kappa|_{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(h)](4,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(-h)](5:7,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(-h)](8,:) + \epsilon_0 |\kappa|_{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(-h)](4,:) \\ \vdots \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(h)](5:7,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(h)](8,:) - \epsilon_0 |\kappa|_{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(h)](4,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(-h)](5:7,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(-h)](8,:) + \epsilon_0 |\kappa|_{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(-h)](4,:) \end{bmatrix} = 0. \quad (6.89)$$

Pour chacun des modes, i.e. chacun des zéros du déterminant, il est possible de calculer les amplitudes relatives en fixant arbitrairement l'une d'elle et ensuite en résolvant le système. A partir des amplitudes relatives, on peut calculer le champ de déplacements et identifier la nature du mode.

Enfin on peut simuler des conditions d'excitation électrique d'une plaque piézocomposite, et en déduire l'admittance harmonique sur une cellule en calculant la charge pour une excitation à un potentiel fixé. On considère une période du piézocomposite et on suppose les électrodes infiniment proches. Dans le cas d'un composite bi-périodique de cellule rectangulaire, la distribution harmonique du potentiel d'excitation est

régie par k_1 et k_2 , et on peut, de façon similaire à la méthode des éléments finis, parler de paramètres d'excitation $\gamma_1 = k_1 d_1/2\pi$ et $\gamma_2 = k_2 d_2/2\pi$.

Sur une période, on écrit le potentiel :

$$\phi(\mathbf{r}, t)|_{x_3=h} = V_0 e^{j\omega t}, \quad (6.90)$$

d'où :

$$\sum_{l=1}^L \left[e^{-j\mathbf{G}^l \cdot \mathbf{r}} \sum_{r=1}^{8L} A^{(r)} e^{-j k_3^{(r)} x_3} \phi^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(r)} \right] = V_0 e^{j(k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \quad (6.91)$$

La projection orthogonale induit :

$$d_1 d_2 \sum_{r=1}^{8L} A^{(r)} e^{-j k_3^{(r)} x_3} \phi^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(r)} = V_0 \int_{\text{cellule}} e^{j((k_1+G_1^l)x_1 + (k_2+G_2^l)x_2)} dx_1 dx_2, \quad (6.92)$$

soit encore dans le cas d'une cellule rectangulaire :

$$\sum_{r=1}^{8L} A^{(r)} e^{-j k_3^{(r)} x_3} \phi^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(r)} = V_0 \operatorname{sinc} \left((k_1 + G_1^l) \frac{d_1}{2} \right) \operatorname{sinc} \left((k_2 + G_2^l) \frac{d_2}{2} \right) \quad (l = 1, \dots, L). \quad (6.93)$$

Pour une cellule soumise à une différence de potentiel V_0 , on résout dans un second temps (après résolution du système aux valeurs propres) le système :

$$\begin{bmatrix} [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(h)](5:7,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(h)](4,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(-h)](5:7,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^1} \Delta(-h)](4,:) \\ \vdots \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(h)](5:7,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(h)](4,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(-h)](5:7,:) \\ [F^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^L} \Delta(-h)](4,:) \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_0 \operatorname{sinc} \left((k_1 + G_1^1) \frac{d_1}{2} \right) \operatorname{sinc} \left((k_2 + G_2^1) \frac{d_2}{2} \right) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V_0 \operatorname{sinc} \left((k_1 + G_1^L) \frac{d_1}{2} \right) \operatorname{sinc} \left((k_2 + G_2^L) \frac{d_2}{2} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.94)$$

afin de déterminer les amplitudes relatives \mathbf{A} .

Il est dès lors possible de déterminer les champs $(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{t}_3(\mathbf{r}, t))^T$, notamment le champ de déplacements pour visualiser la déformée de la structure. On calcule aussi la charge sur la surface $x_3 = h$, égale au saut du déplacement électrique normal :

$$\sigma(\mathbf{r}, t)|_{x_3=h} = e^{j(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)} \sum_{l=1}^L \left[e^{-j\mathbf{G}^l \cdot \mathbf{r}} \sum_{r=1}^{8L} A^{(r)} e^{-j k_3^{(r)} h} \left[D_3^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(r)} - \operatorname{sign} \epsilon_0 |\kappa|_{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l} \phi^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(r)} \right] \right]. \quad (6.95)$$

En intégrant la charge sur la période et en multipliant par la pulsation, on obtient l'admittance harmonique :

$$Y(\omega, k_1, k_2) = \frac{I}{V_0} = j\omega \frac{\sigma_{total}}{V_0}, \quad (6.96)$$

avec :

$$\sigma_{total} = \iint_{\text{cellule}} \sigma(\mathbf{r}, t)|_{x_3=h} dx_1 dx_2 \quad (6.97)$$

soit, en fixant $V_0 = 1V$:

$$\begin{aligned} Y(\omega, k_1, k_2) &= j\omega \sum_{l=1}^L \sum_{r=1}^{8L} \left[A^{(r)} e^{-j k_3^{(r)} h} \left[D_3^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(r)} - \text{sign } \epsilon_0 |\kappa|_{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l} \phi^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(r)} \right] \right] \\ &\times \left(d_1 \text{sinc} \left((k_1 + G_1^l) \frac{d_1}{2} \right) \right) \left(d_2 \text{sinc} \left((k_2 + G_2^l) \frac{d_2}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.98)$$

Notons que, pour un composite 2-2 de période d , l'admittance harmonique devient :

$$\begin{aligned} Y(\omega, k_1) &= j\omega \sum_{l=1}^L \sum_{r=1}^{8L} \left[A^{(r)} e^{-j k_3^{(r)} h} \left[D_3^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(r)} - \text{sign } \epsilon_0 |\kappa|_{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l} \phi^{\mathbf{k}+\mathbf{G}^l(r)} \right] \right] \\ &\times \left(d \text{sinc} \left((k_1 + G_1^l) \frac{d}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.99)$$

Milieux semi-infinis Le milieu semi-infini (cf figure 6.9) impose des conditions aux limites de surface à l'interface entre les deux milieux, et des conditions d'extinction du champ en $x_3 = -\infty$. Ces dernières permettent de réduire le nombre de variables indépendantes à $4L$, qui vont donc être caractérisées par les conditions aux limites surfaciques. Comme il est fait dans le domaine des ondes de surface, il est nécessaire d'effectuer un tri des modes, autrement dit d'examiner la validité des modes partiels qui entrent dans le développement (6.74), afin de ne conserver que ceux qui ont une signification physique.

La sélection se fait par rapport aux valeurs propres $k_3^{(r)}$ complexes. On prend l'axe x_3 sortant du milieu semi-infini. L'exponentielle contenant $k_3^{(r)}$ s'écrit :

$$e^{-j k_3^{(r)} x_3} = e^{-j \text{Re}(k_3^{(r)}) x_3} e^{\text{Im}(k_3^{(r)}) x_3}. \quad (6.100)$$

Quand x_3 tend vers $-\infty$, l'exponentielle tend vers zéro si $\text{Im}(k_3^{(r)})$ est positive. Le mode partiel correspondant décroît suivant les $x_3 < 0$. Si $\text{Im}(k_3^{(r)})$ est négative, l'exponentielle tend vers l'infini et l'énergie croît indéfiniment suivant les $x_3 < 0$, ce qui n'a pas de sens physique. Il est donc écarté. Si $\text{Im}(k_3^{(r)})$ est nulle, le mode partiel est propagatif. Le critère de sélection devient dans ce dernier cas le signe de la composante normale du vecteur de Poynting qui représente la densité de puissance transportée par le mode partiel.

L'expression du vecteur de Poynting du mode partiel r est :

$$P_j^{(r)}(x_i, t) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ -T_{ij}^{(r)} \frac{\partial \overline{u_i^{(r)}}}{\partial t} + \phi^{(r)} \frac{\partial \overline{D_j^{(r)}}}{\partial t} \right\}, \quad (6.101)$$

soit encore :

$$P_j^{(r)}(x_i) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ j\omega \left(T_{ij}^{(r)} \overline{u_i^{(r)}} - \phi^{(r)} \overline{D_j^{(r)}} \right) \right\}, \quad (6.102)$$

$$= \frac{\omega}{2} \text{Re} \left\{ j T_{ij}^{(r)} \overline{u_i^{(r)}} \right\} + \frac{\omega}{2} \text{Re} \left\{ -j \phi^{(r)} \overline{D_j^{(r)}} \right\}. \quad (6.103)$$

Remarquons que :

$$\operatorname{Re} \left\{ -j \phi^{(r)} \overline{D_j^{(r)}} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \overline{-j \phi^{(r)} D_j^{(r)}} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ j D_j^{(r)} \overline{\phi^{(r)}} \right\}. \quad (6.104)$$

La composante normale du vecteur de Poynting du mode partiel r s'exprime simplement par :

$$P_3^{(r)}(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} \left\{ j \mathbf{t}_3^{p(r)}(\mathbf{r}) \cdot \overline{\mathbf{u}^{p(r)}(\mathbf{r})} \right\}, \quad (6.105)$$

où :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{t}_3(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = e^{j(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)} \sum_{r=1}^{8L} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{p(r)}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{t}_3^{p(r)}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (6.106)$$

On définit ensuite le vecteur de Poynting moyen $\tilde{P}_3^{(r)}$ du mode partiel r . Pour le composite bi-périodique de cellule rectangulaire :

$$\tilde{P}_3^{(r)} = \frac{1}{d_1 d_2} \iint_{\text{cellule}} P_3^{(r)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (6.107)$$

$$= \frac{1}{d_1 d_2} \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} \left\{ j \iint_{\text{cellule}} \mathbf{t}_3^{p(r)}(\mathbf{r}) \cdot \overline{\mathbf{u}^{p(r)}(\mathbf{r})} d\mathbf{r} \right\}, \quad (6.108)$$

$$= \frac{1}{d_1 d_2} \frac{\omega}{2} |A^{(r)}|^2 \operatorname{Re} \left\{ j \iint_{\text{cellule}} \sum_{l=1}^L e^{-j \mathbf{G}^l \cdot \mathbf{r}} \mathbf{t}_3^{\mathbf{k} + \mathbf{G}^l(r)} \sum_{i=1}^L e^{j \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{r}} \overline{\mathbf{u}^{\mathbf{k} + \mathbf{G}^i(r)}} d\mathbf{r} \right\}, \quad (6.109)$$

$$= \frac{1}{d_1 d_2} \frac{\omega}{2} |A^{(r)}|^2 \operatorname{Re} \left\{ j \sum_{l,i=1}^L \mathbf{t}_3^{\mathbf{k} + \mathbf{G}^l(r)} \overline{\mathbf{u}^{\mathbf{k} + \mathbf{G}^i(r)}} \iint_{\text{cellule}} e^{-j \mathbf{G}^l \cdot \mathbf{r}} e^{j \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right\}, \quad (6.110)$$

$$= \frac{\omega}{2} |A^{(r)}|^2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^L j \mathbf{t}_3^{\mathbf{k} + \mathbf{G}^l(r)} \overline{\mathbf{u}^{\mathbf{k} + \mathbf{G}^l(r)}} \right\}. \quad (6.111)$$

Notons que les termes exponentiels $e^{-j k_3^{(r)} x_3}$ disparaissent étant donné qu'on se trouve dans le cas où les valeurs propres $k_3^{(r)}$ sont réelles. En notation compacte, on écrit finalement le vecteur de Poynting moyen :

$$\tilde{P}_3^{(r)} = \frac{\omega}{2} |A^{(r)}|^2 \operatorname{Re} \left\{ j \tilde{\mathbf{T}}_3^{\mathbf{k}} \cdot \overline{\tilde{\mathbf{U}}^{\mathbf{k}}} \right\}. \quad (6.112)$$

Le signe dépend uniquement des vecteurs propres du système (6.69). Les modes partiels physiquement acceptables correspondent à un vecteur de Poynting négatif, ce qui signifie qu'ils se propagent vers l'intérieur du milieu, ou encore qu'ils sont rayonnés par la surface et non incidents à celle-ci.

On sélectionne ainsi les $4L$ modes partiels acceptables physiquement et on impose les conditions aux limites en ne considérant que ces seuls modes.

Applications numériques On traite quelques applications numériques afin d'illustrer le fonctionnement de la méthode et de montrer le type de résultats que l'on peut en extraire [71].

Modes acoustiques dans une plaque de quartz Le premier exemple a été choisi pour valider l'approche. Le problème traité est le calcul des modes d'une plaque de quartz de coupe Z et de propagation selon X . En ne considérant que le terme fondamental dans les séries de Fourier et Bloch-Floquet, on simule directement une plaque homogène, soit en choisissant le même matériau pour les inclusions et la matrice,

soit en réduisant la taille des inclusions à zéro. On revient à la méthode de Fahmy-Adler originale.

La résolution du système aux valeurs propres (6.69) donne 8 valeurs propres $k_3^{(r)}$, à partir desquelles on peut tracer les courbes de lenteur $s_3 = k_3/\omega$ en fonction de $s_1 = k_1/\omega$. Pour une propagation suivant l'axe X , la lenteur s_2 est nulle et par conséquent k_2 l'est aussi (pas de propagation suivant Y). La figure 6.10 montre les courbes de lenteur ainsi obtenues. Notons que la figure n'est pas complète parce qu'on a résolu le système pour une valeur de k_1 fixée et un balayage de la pulsation ω .

Rappelons que la vitesse de l'énergie est normale à la surface des lenteurs [3]. On remarque d'ores et déjà quatre valeurs du couple (s_1, s_3) pour lesquelles la vitesse de l'énergie est parallèle à la surface de la plaque.

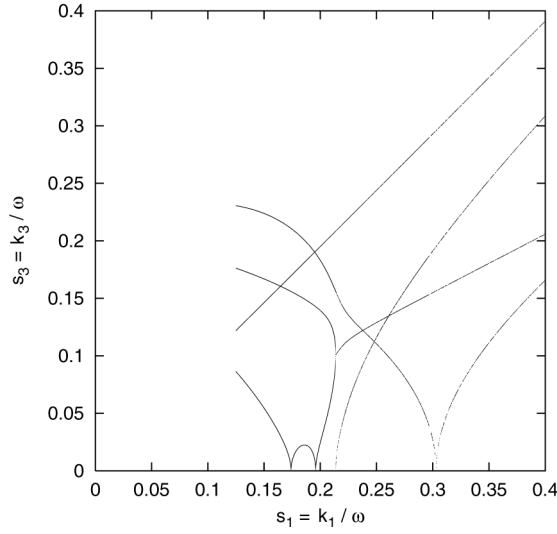


FIG. 6.10 – Courbes de lenteur du quartz coupe Z propagation X .

A partir des vecteurs propres, on calcule le déterminant du système formé par les conditions aux limites. Les zéros de ce déterminant indiquent les modes élastiques de la plaque. Le déterminant et ses zéros sont reportés sur la figure 6.11.

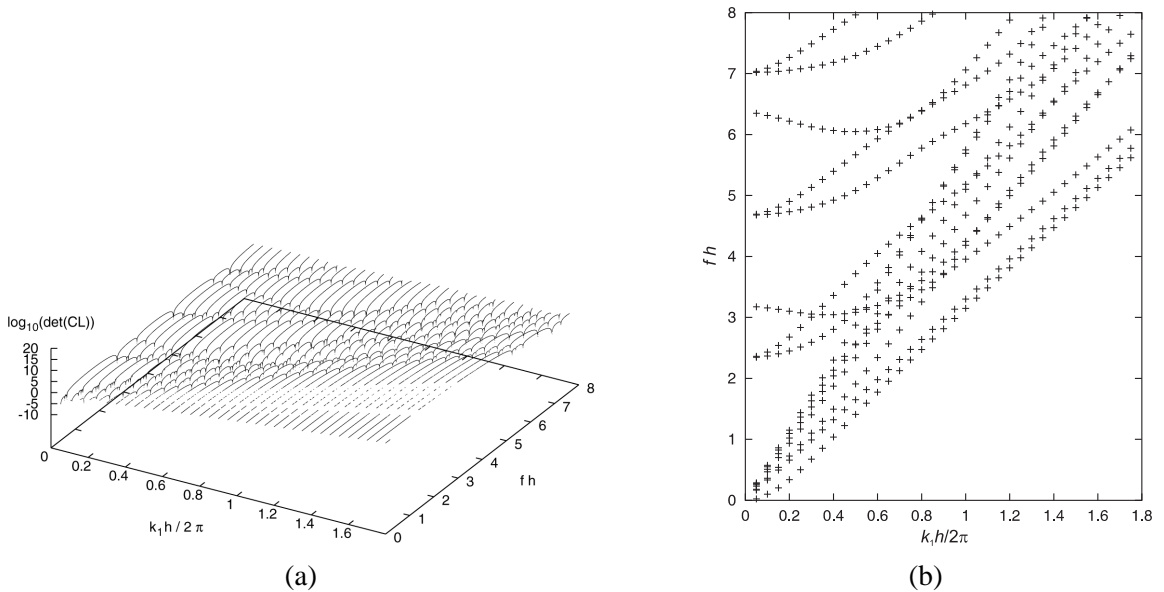


FIG. 6.11 – Calcul du déterminant du système aux conditions aux limites (a) et détection des zéros (b).

Enfin on compare sur la figure 6.12 les modes élastiques trouvés avec notre méthode à ceux déterminés par un calcul "classique" de fonction de Green [72] éprouvé dans le domaine des ondes de surface. On trouve les différents modes de Lamb [3], ainsi que quatre modes non dispersifs non affectés par l'épaisseur de la plaque. Ces quatre derniers modes correspondent à des ondes dont l'énergie se propage parallèlement à la surface et dont on a identifié les lenteurs précédemment. Il s'agit de trois ondes de volume, une onde longitudinale et deux ondes transverses à respectivement 5748, 5103,3, et 3300,5 m.s^{-1} . Le quatrième mode à 4678 m.s^{-1} correspond à une onde de volume "rampante" ou SSBW (*surface skimming bulk wave*) dont le vecteur de Poynting est parallèle à la surface au contraire du vecteur d'onde.

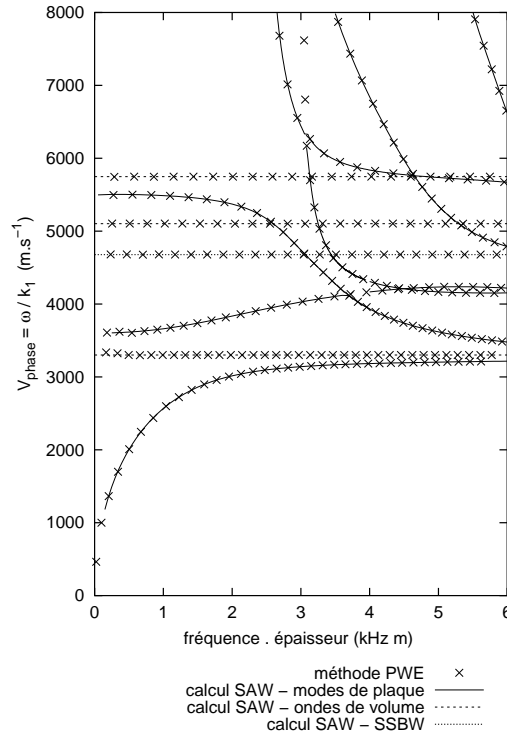


FIG. 6.12 – Autre représentation de la figure 6.11b et comparaison avec le calcul classique de fonction de Green [72].

Admittance et modes propres d'un piézocomposite de connectivité 2-2 La deuxième application est un composite 2-2 PZT/résine dont on calcule les modes propres ainsi que l'admittance harmonique avec la formule (6.99). Le schéma d'un composite 2-2 est donné par la figure 6.13. L'épaisseur du composite est fixée à 200 μm . La période suivant x_1 vaut 150 μm avec des éléments de PZT de largeur 100 μm . Le composite est supposé infini dans sa largeur suivant x_2 (hypothèse de déformations planes) et infiniment périodique suivant x_1 .

Les ondes de volume se propageant suivant l'axe x_1 ont d'abord été déterminées en supposant l'épaisseur du composite infinie. Les modes propres du composite sous forme de plaque ont ensuite été extraits en supposant les deux surfaces métallisées et en court-circuit (dans les conditions de résonance). La seule considération de ces conditions ne permet pas de distinguer les modes couplés de ceux qui ne le sont pas, puisqu'il faut, pour ce faire, considérer ensemble les conditions de résonance et d'antirésonance. Enfin, on a préféré calculer l'admittance harmonique pour déterminer les modes piézoélectriquement couplés, en supposant la surface supérieure active et la surface inférieure à la référence électrique. Tous les calculs ont été menés en limitant les séries à 6 termes dans les expressions des champs et des constantes des matériaux,

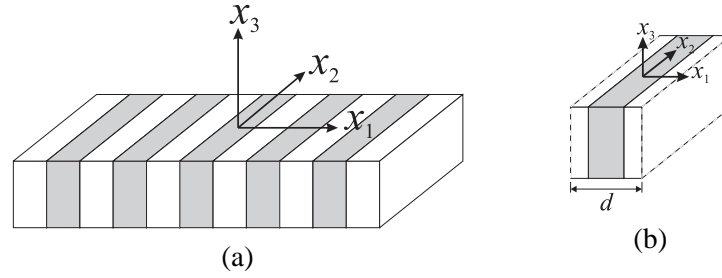


FIG. 6.13 – Représentation d'un composite 2-2 (a) et de sa cellule élémentaire (b).

ce qui représentait un bon compromis entre précision et temps de calcul. Les résultats sont reportés sur les figures 6.14 et 6.15.

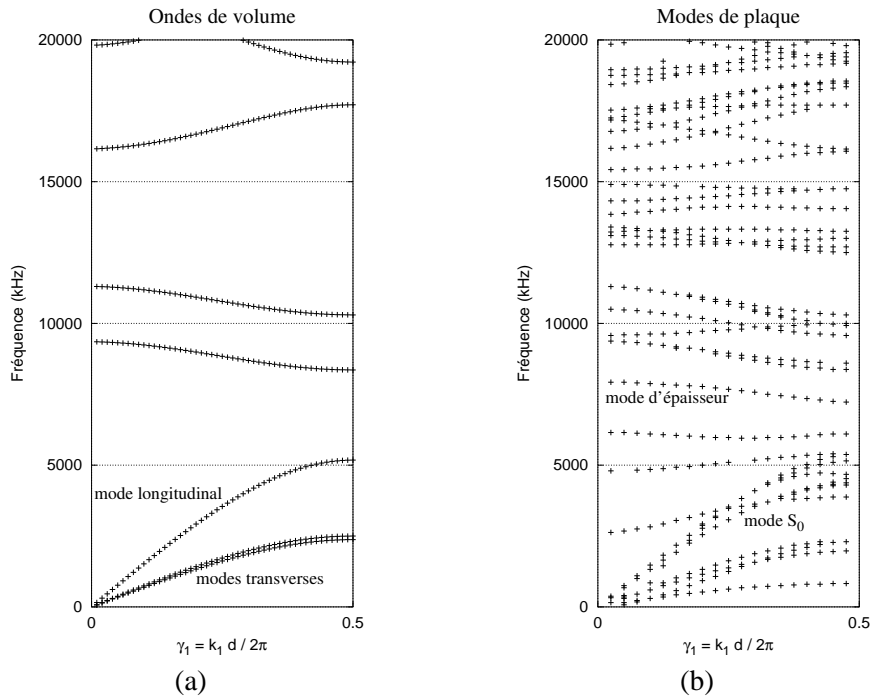


FIG. 6.14 – Courbes de dispersion du composite 2-2 : ondes de volume se propageant suivant x_1 (a), et modes de plaque du composite (b) identifiés par les zéros du système formé par les conditions aux limites.

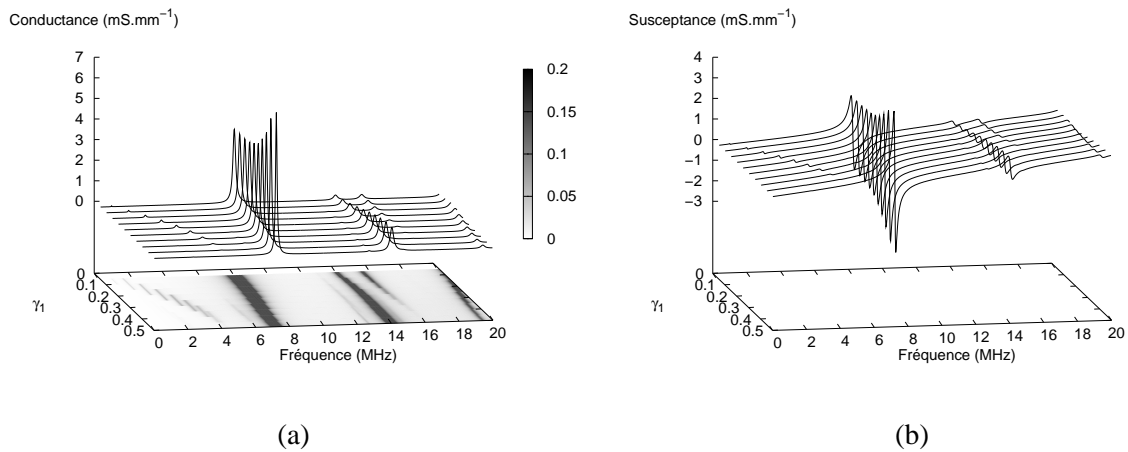


FIG. 6.15 – Parties (a) réelle et (b) imaginaire de l'admittance harmonique du composite 2-2. Les fréquences de résonance sont données par les maxima de conductance.

La figure 6.14 représente les modes propres (volume et plaque) du composite. Dans le cas des ondes de volume se propageant suivant x_1 , on identifie facilement, par analogie à ce qui est connu, les trois premières contributions comme les deux modes transverses et le mode longitudinal. La différence de fréquences des deux modes transverses (horizontal et vertical) est due à l'anisotropie du PZT dont l'axe de polarisation est pris vertical (suivant x_3). Les deux branches autour de 10 MHz et celle autour de 20 MHz visible pour γ_1 entre 0,3 et 0,5 correspondent au premier repliement des trois modes précités dans la première zone de Brillouin. Dans ce cas, la longueur d'onde est comprise entre $2d$ et d . Enfin les deux derniers modes correspondent au deuxième repliement (λ entre d et $\frac{2}{3}d$). Le phénomène de création des bandes d'arrêt et de séparation des branches est expliqué dans la section C. Les vitesses de phase de ces ondes sont comprises entre celles de chaque matériau qui compose la structure. La largeur des bandes d'arrêt dépend ensuite de la fraction volumique de chaque matériau, ainsi que de la différence d'impédance acoustique.

Le cas des modes de plaque est plus difficile à traiter. En effet, si ceux-ci sont identifiés par les zéros du déterminant du système aux conditions aux limites, de nombreuses valeurs minimisant le déterminant ne sont que des minima locaux et non de vrais zéros. Ces valeurs ne correspondent alors pas à des solutions véritables du système, et doivent être éliminées par une technique mathématique adaptée. Les ondes de volume notamment apparaissent sur ces courbes de dispersion comme dans le cas de la plaque de quartz.

Enfin la figure 6.15 présente la partie réelle de l'admittance harmonique (la conductance) dont les pics mettent en évidence les modes couplés. La conductance est tracée en fonction de la fréquence et du paramètre d'excitation γ_1 , commensurable à un vecteur d'onde normalisé suivant l'axe x_1 , tel que $\gamma_1 = k_1^0 d / 2\pi$ où k_1^0 est réel et le vecteur k_1^0 est intérieur à la première zone de Brillouin. Lorsque γ_1 vaut 0, deux cellules voisines vibrent en phase tandis qu'elles vibrent en opposition de phase lorsque γ_1 vaut 0,5. On identifie le premier mode de Lamb symétrique et le mode d'épaisseur (mode utile). On retrouve les modes couplés mis en évidence par la conductance sur les courbes de dispersion de la figure 6.14b.

Admittance et champs de déplacements d'un piézocomposite de connectivité 1-3 La dernière illustration de l'approche "développement en ondes planes/formulation de Fahmy-Adler" est un composite bi-périodique 1-3, dont une représentation est donnée sur la figure 6.16.

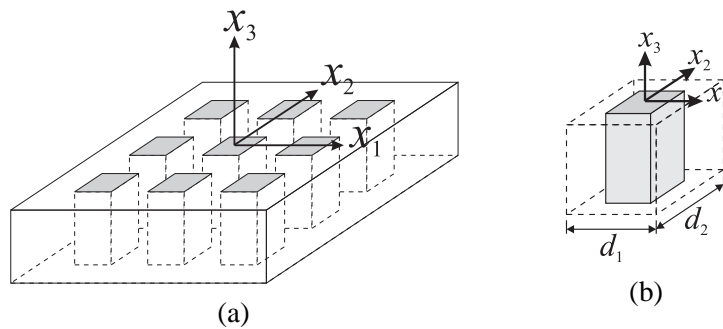


FIG. 6.16 – Représentation d'un composite 1-3 (a) et de sa cellule élémentaire (b).

L'épaisseur du composite est fixée à $300 \mu\text{m}$, sa période (suivant x_1 et x_2) à $200 \mu\text{m}$ et la largeur des plots de PZT à $100 \mu\text{m}$. Le nombre de termes dans les séries décrivant les champs et les constantes a été ramené à 5 dans chaque direction de périodicité soit 25 termes au total.

On calcule l'admittance harmonique dans la direction x_1 . On fait varier le paramètre d'excitation γ_1 entre 0 et 0,5 pour une valeur de γ_2 nulle (excitation en phase suivant x_2). Si on suppose la composante k_1 du vecteur d'onde réelle, il existe un entier relatif m tel que : $k_1 = k_1^0 + \frac{2\pi m}{d_1}$, où k_1^0 est contenu dans la première zone de Brillouin. Alors la variation de γ_1 revient à faire varier k_1^0 entre 0 et $\frac{\pi}{d_1}$ pour toute valeur

de m . Le résultat est reporté sur la figure 6.17. On identifie le premier mode de Lamb symétrique (mode S_0), le mode d'épaisseur et le premier mode latéral évoqué dans la section 2.4.5. On peut déjà établir une première comparaison avec la méthode des éléments finis pour laquelle on a effectué le même calcul avec la même structure (voir section 5.3.4). Qualitativement, on retrouve les mêmes contributions. Le mode S_0 et le mode d'épaisseur sont trouvés aux mêmes fréquences dans les deux calculs.

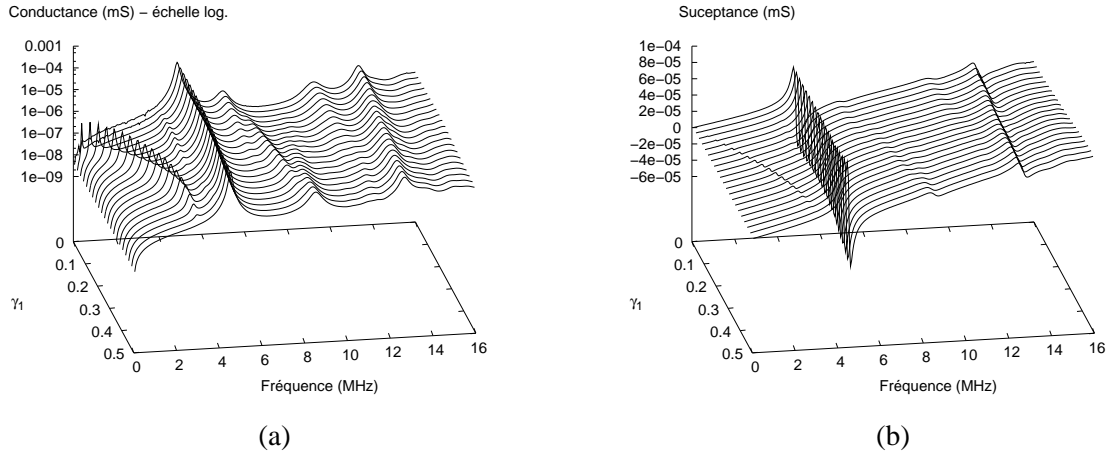


FIG. 6.17 – Parties (a) réelle et (b) imaginaire de l'admittance harmonique du composite 1-3 pour γ_1 variant de 0 à 0,5 et γ_2 nul.

Cependant, si on retrouve des résultats similaires autour de la fréquence du mode d'épaisseur, les différences deviennent plus marquées à plus haute fréquence pour les modes d'ordres plus élevés. Rappelons que la précision des calculs est liée à la taille des éléments pour la méthode des éléments finis et au nombre de termes dans les séries pour la méthode de développement en ondes planes. On peut noter à ce sujet que, si la taille des éléments limite la précision pour les modes d'ordres élevés, que ce soit dans l'épaisseur ou la largeur, le développement en ondes planes fait intervenir une approximation uniquement dans le plan du composite et pas dans l'épaisseur. En termes clairs, la méthode de développement en ondes planes limite la précision pour les modes de faibles longueurs d'ondes dans le plan, mais pas pour ceux de faibles longueurs d'ondes suivant l'épaisseur, contrairement à la méthode des éléments finis.

Enfin, on peut calculer le profil de quelques modes en reconstruisant le champ de déplacements grâce à l'équation (6.74). La figure 6.18 montre le profil du premier mode de Lamb symétrique, couplé lorsque γ_1 est différent de 0 et de 0,5, pour γ_1 égal à 0,25 (cellules voisines en quadrature) et pour la fréquence égale à 2350 kHz. Le mode est représenté pour quatre cellules adjacentes, soit une longueur d'onde. Le profil fait bien apparaître la nature du mode S_0 , qui est un mode de compression longitudinale suivant la direction de propagation x_1 . Notons que la compression d'une cellule s'accompagne d'une elongation dans l'épaisseur.

Les formes du mode d'épaisseur et du premier mode latéral sont représentées sur la figure 6.19 pour γ_1 et γ_2 nuls, lorsque toutes les cellules vibrent en phase. Si le faible nombre d'harmoniques dans les séries ne permet pas de faire apparaître la discontinuité des déformations à l'interface PZT/résine, on retrouve toutefois les mêmes champs de déplacements (à la phase près) que ceux obtenus par la méthode des éléments finis (voir figure 5.6). On retrouve notamment le champ de déplacements typique du premier mode latéral pour lequel la matrice de résine aux coins de la cellule vibre en opposition de phase du barreau de PZT.

Pour finir, on établit une comparaison quantitative entre nos calculs et le modèle de Smith et Auld [21]. On détermine tout d'abord la vitesse de phase effective du mode de compression longitudinal et le coefficient de couplage électromécanique par ce dernier, en fonction de la fraction volumique de céramique.

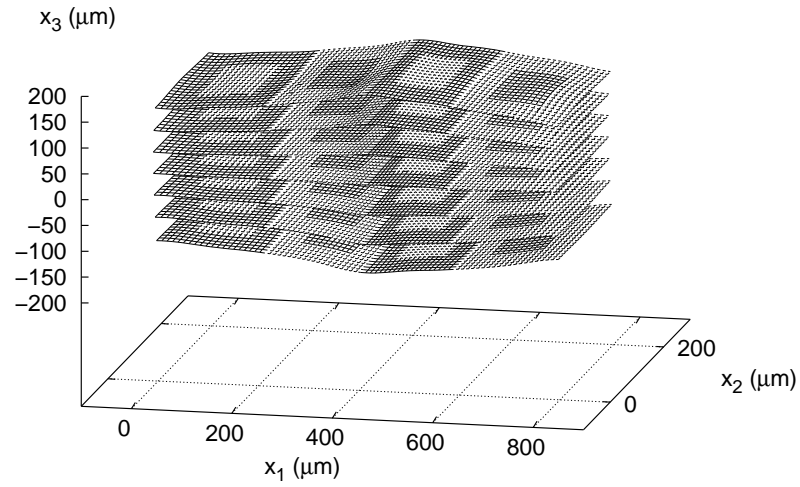


FIG. 6.18 – Profil du premier mode de Lamb symétrique se propageant dans le composite 1-3 le long de l'axe x_1 , pour $\gamma_1=0,25$ et $f=2350$ kHz.

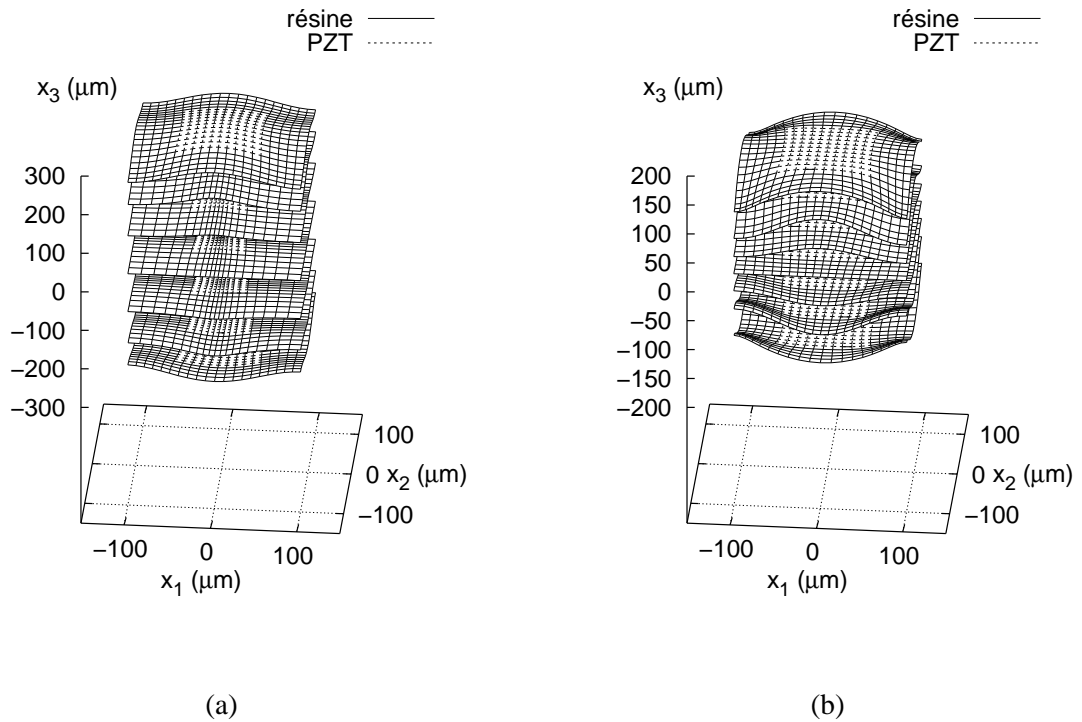


FIG. 6.19 – Mode d'épaisseur (a) à 4900 kHz et premier mode latéral (b) à 7200 kHz. Dans les deux cas, les paramètres d'excitation sont nuls.

A partir de l'admittance harmonique, calculée pour différentes valeurs du nombre de termes dans les séries et dans des conditions d'excitation synchrone ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), on détermine les fréquences de résonance et d'antirésonance du mode d'épaisseur. Ces deux fréquences nous permettent ensuite de déterminer la vitesse de phase effective et le coefficient de couplage du mode. Pour ces calculs, la période reste fixée à $200 \mu\text{m}$ pour une hauteur de $400 \mu\text{m}$. On fait ensuite varier la largeur des barreaux. Les résultats sont superposés sur la figure 6.20. En augmentant le nombre de termes dans les séries, la méthode de développement en ondes planes converge vers le modèle de Smith et Auld, d'autant plus vite que la fraction volumique de céramique est petite. De plus, le domaine de validité du modèle de Smith et Auld est intimement lié au rapport largeur/hauteur, que ce soit la largeur des barreaux ou celle de la cellule élémentaire, ce qui peut être un élément de compréhension de la façon dont la méthode converge vers le modèle analytique.

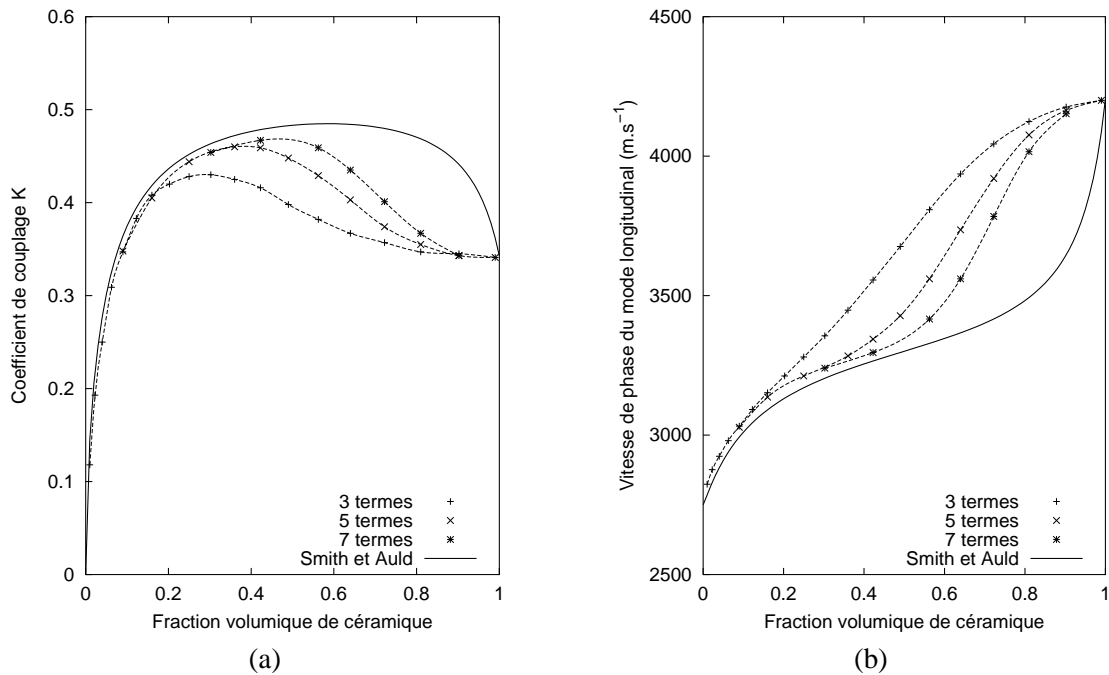


FIG. 6.20 – Comparaison entre le modèle de Smith et Auld et les résultats du développement en ondes planes, pour différents nombres de termes dans les séries. (a) Couplage électromécanique et (b) vitesse longitudinale effective.

6.3 Conclusion

On a développé un modèle basé sur une méthode de développement en ondes planes capable de décrire de façon unifiée des matériaux composites périodiques ainsi que les champs qui y prennent place. Ce modèle prend en compte l'anisotropie et la piézoélectricité des matériaux. Deux aspects ont été développés dans le but d'analyser les composites bi-périodiques. L'un consiste à tenir compte d'un angle d'incidence entre la direction de propagation des ondes et le plan de la structure (plan normal aux axes des inclusions), structure par ailleurs considérée infinie dans l'épaisseur. L'autre consiste à considérer des composites d'épaisseur finie (type plaque) ou semi-infinie, ainsi que les conditions aux limites afférentes aux surfaces. Il intègre de plus la prise en charge des pertes des matériaux.

Le calcul de plaques a été utilisé afin d'apporter un éclairage supplémentaire sur les points durs mis en évidence par la méthode des éléments finis, notamment la présence de modes (maxima dans la conductance) auxquels on ne s'attendait pas forcément lors des premiers calculs. La grande flexibilité de la méthode des

éléments finis, ainsi que la rapidité de son algorithme de résolution, lui ont donné l'avantage pour le calcul des composites de type plaque. Toutefois, la propagation hors-plan dans les composites d'épaisseur finie est un outil d'analyse qui apporte des compléments de réponse quant au fonctionnement des piézocomposites et à la nature des modes qui s'y propagent (cf section 7.2.2). D'autres applications sont aussi envisageables, notamment dans le domaine des ondes de surface dans lequel on s'intéresse à des cristaux phononiques semi-infinis [73].

D'autre part, il est aussi possible d'imposer des conditions aux limites de rayonnement en conjuguant la méthode de développement en ondes planes et la méthode de la matrice de diffusion [63], c'est-à-dire en interfaçant les deux mondes. En se rappelant que la méthode de la matrice de diffusion est aussi issue de la méthode Fahmy-Adler, on peut imaginer qu'il est possible de réorganiser la méthode PWE en se servant pleinement de la méthode de la matrice de diffusion, et en tirant profit de ses avantages intrinsèques, notamment la stabilité des calculs quelque soit l'épaisseur des couches. On accèderait alors à la possibilité de simuler des empilements de couches composites et, au minimum, les conditions aux limites de rayonnement évoquées ci-dessus seraient pleinement prises en compte.

De même que la méthode des éléments finis est limitée par l'échantillonnage spatial de la structure, la méthode de développement en ondes planes est limitée par le nombre de termes dans les séries qui détermine la taille du système à résoudre. Ces critères de limitation déterminent au final la méthode utilisée en fonction de l'approche envisagée de la structure composite, et font des deux méthodes exposées dans ces deux derniers chapitres des méthodes complémentaires.

Troisième partie

Analyse de structures

Introduction

On a décrit dans la partie II les différents modèles adoptés pour le calcul numérique de structures périodiques. On s'est spécifiquement attaché au développement de ces méthodes pour des structures bi-périodiques planes – bien qu'elles soient généralisables au cas tridimensionnel – en vue d'étudier le comportement des réseaux de transducteurs dans les sondes ultrasonores modernes pour l'imagerie médicale (échographie) et le contrôle non-destructif.

La plupart des sondes actuelles sont construites autour d'une structure piézocomposite. Qu'ils s'agissent de réseaux de phases ou de sondes mono-éléments, il est important de posséder une connaissance approfondie du fonctionnement de leur élément de base, avant de pouvoir procéder à l'analyse de sondes complètes. On tire pleinement profit de notre approche périodique pour décrire les différents phénomènes qui sont susceptibles de se produire dans les composites, et pour en avoir une compréhension générale. Dans ce sens, on se sert de nos outils pour caractériser ces structures et analyser les phénomènes que l'on considère perturbants pour notre application. On en tire ensuite quelques critères d'optimisation.

Enfin, les transducteurs micro-usinés sur silicium (MUTs), qui consistent en réseaux de membranes vibrant sur un mode de flexion, sont une technologie émergente de ces dernières années, non seulement pour les applications qui nous intéressent, mais aussi pour des applications capteurs ou micro-fluidiques. Jusqu'à présent, les calculs faisaient état du fonctionnement d'un réseau infini de membranes vibrant en phase, ou à l'opposé d'un ensemble de quelques membranes excitées aussi en phase. Dans le deuxième cas, ils font apparaître les conséquences des effets de diaphonie sans en fournir d'explications. On met à profit la flexibilité de notre modèle FEA/BEM pour mener une première étude de ces structures en tenant compte de leur périodicité et de ce que cela induit. On met notamment en évidence la nature des vibrations qui se propagent dans les réseaux de MUTs en immersion et qui sont à l'origine des effets de diaphonie.

Chapitre 7

Composites piézoélectriques

7.1 Composites 2-2

Le cas de la structure composite 2-2 est abordé afin d'illustrer l'intérêt des concepts d'admittances harmoniques et mutuelles pour l'étude des effets de diaphonie [74], et pour vérifier la pertinence des idées de base. Pour ce faire, on choisit d'appliquer la méthode des éléments finis décrite précédemment. D'une part, cela nous permet de nous limiter à un maillage 2D et de procéder à de multiples calculs, notamment d'établir une comparaison entre le calcul "périodique" et le calcul d'une structure comportant un nombre fini de cellules qui sont alors toutes maillées, ou encore de faire varier des paramètres. D'autre part, la plupart des sondes commerciales 1D modernes sont construites autour de cette structure. Un exemple de sonde commerciale est traité dans la section 7.3. On se cantonne dans un premier temps à l'étude de l'élément de base.

La période d du composite est de $200\ \mu\text{m}$ pour une largeur des barreaux de PZT de $100\ \mu\text{m}$, soit une fraction volumique de céramique égale à 50% (voir figure 7.1). Enfin son épaisseur est égale à $300\ \mu\text{m}$, ce qui induit un rapport largeur/hauteur du PZT de 0,33. Le composite est considéré infini dans la profondeur et l'on se ramène à un problème à deux dimensions. En pratique, cela signifie que les barrettes de PZT ont une largeur petite devant la profondeur et que les effets de bord sont négligés.

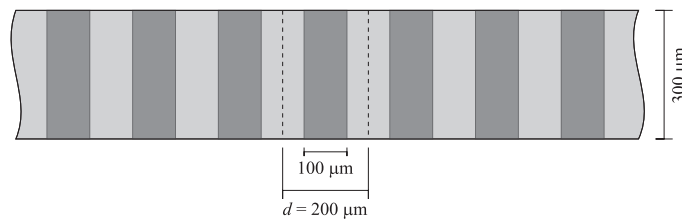


FIG. 7.1 – Schéma bidimensionnel du composite 2-2 étudié.

On calcule d'abord l'admittance harmonique du composite. Le résultat est reporté sur la figure 7.2(a). Le mode d'épaisseur se situe autour de 5 MHz et on trouve le premier mode latéral autour de 8 MHz pour le paramètre d'excitation γ_1 nul (excitation synchrone de tout le réseau, voir section 3.2). Quand γ_1 augmente (introduction d'un déphasage entre chaque cellule), ce dernier est de moins en moins couplé. Pour une gamme de fréquences comprises entre 0 et 3 MHz, on trouve le premier mode de Lamb symétrique S_0 , couplé lorsque γ_1 est différent de 0 et 0,5 (deux cellules voisines en phase et en opposition de phase respectivement). La longueur d'onde est comprise entre l'infini à $\gamma_1 = 0$ et deux fois la période à $\gamma_1 = 0,5$. Pour ces deux valeurs, la figure d'excitation est incompatible avec la forme de la vibration. A $\gamma_1 = 0,25$

pour lequel le mode est couplé, la longueur d'onde vaut quatre fois la période ($\gamma_1 = \frac{d}{\lambda_1} = \frac{1}{4}$).

On effectue le calcul des admittances mutuelles par transformée de Fourier de l'admittance harmonique en utilisant une méthode de Gauss pour l'intégration [75]. On définit 30 points de Gauss (points d'intégration) pour γ_1 dans l'intervalle $[0; 0,5]$, ce qui équivaut à réaliser l'intégration sur 60 points, en tirant partie de la symétrie de l'admittance harmonique par rapport à $\gamma_1 = 0,5$.

On reporte sur la 7.2(b) les admittances mutuelles pour les 20 premiers voisins. Au-delà, l'intégration numérique n'est plus valable, ce qui fixe une limite à l'approche proposée pour l'effectuer. En effet, on considère que les variations de l'admittance harmonique en fonction de γ_1 peuvent être approchées par un polynôme de degré élevé. Le degré détermine le choix du nombre de points d'intégration. Cependant, le calcul des admittances mutuelles pour le voisin n fait intervenir des termes en $\cos(2\pi n\gamma_1)$ et $\sin(2\pi n\gamma_1)$ qui se mettent à osciller suivant γ_1 pour des valeurs de n grandes, et qui augmentent le degré polynomial de la fonction à intégrer. Il existe donc une relation entre le nombre de points de Gauss et le domaine de pertinence du calcul des mutuelles. De plus, le nombre de points d'intégration définit un certain échantillonnage en γ_1 qui limite aussi le facteur de qualité des contributions qui peuvent être correctement intégrées.

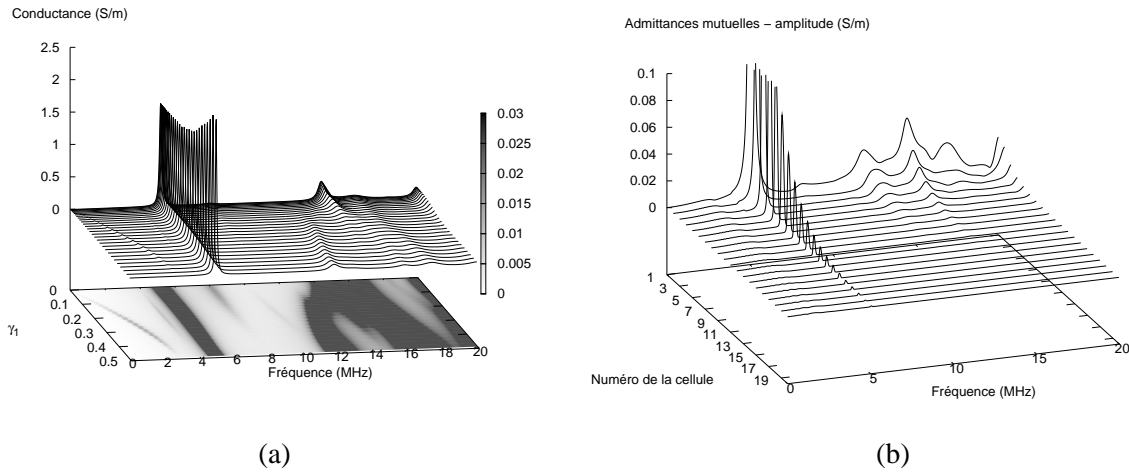


FIG. 7.2 – (a) admittance harmonique, (b) admittances mutuelles.

Afin d'établir une comparaison qualitative, on simule le même composite avec un nombre fini de périodes, soit 9 et 49 périodes. Dans les deux cas, on maille le composite entier et on applique un potentiel sur la cellule du centre ($n = 0$) et toutes les autres sont mises à la masse. Pour une excitation de 1 V, l'admittance mutuelle de la n ème cellule est directement donnée par le courant circulant entre ses deux électrodes. Le résultat est donné sur les figures 7.3(a)–(c) pour le cas à 9 cellules, 49 cellules, et le calcul périodique respectivement.

La dépendance en fréquence des admittances mutuelles obtenues dans les trois cas est très similaire. Dans le cas du composite infini comparé avec le composite à 49 périodes, les admittances mutuelles des cinq premiers voisins se superposent strictement. Des différences sont visibles si on compare avec le cas du composite à 9 périodes. Sous la fréquence du mode fondamental d'épaisseur du composite, situé autour de 5 MHz, des pics apparaissent. Ils sont dus à des résonances de la structure suivant sa largeur – la largeur totale du composite est $L = 9 \times 0,2 = 1,8$ mm pour 9 périodes. Pour le mode S_0 , le vecteur d'onde est contenu dans la première zone de Brillouin. On peut relier le paramètre d'excitation γ_1 à sa longueur d'onde λ_1 par : $\lambda_1 = d/\gamma_1$. La plaque résonne sur un mode de compression suivant sa longueur si la longueur d'onde vaut : $\lambda_1 = 2L/(2k + 1)$, pour tout entier $k \geq 0$, par respect de la symétrie du composite et de l'excitation. Pour un composite constitué de N périodes ($L = Nd$), on a une résonance globale de la plaque sur un mode de

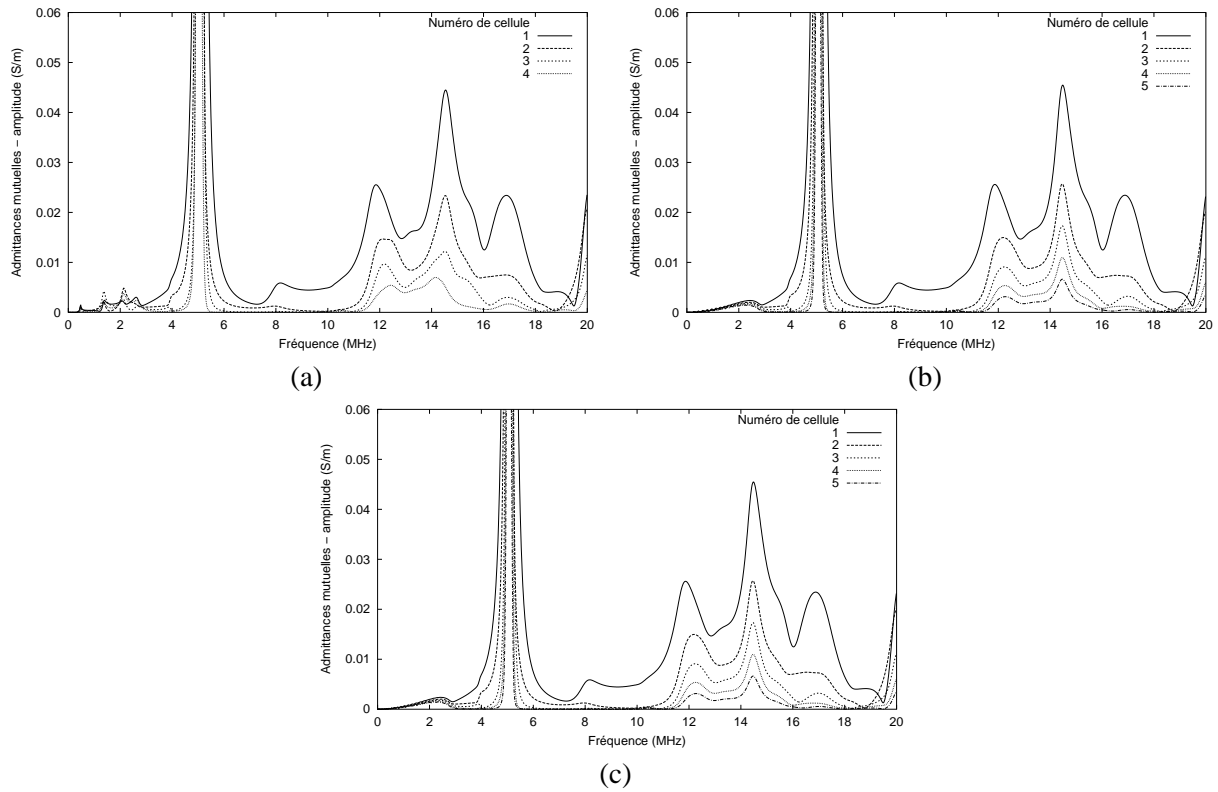


FIG. 7.3 – Admittances mutuelles des cellules les plus proches de la cellule excitée pour (a) un composite de largeur finie comportant 9 périodes, (b) un composite de largeur finie de 49 périodes et (c) un composite infini dans la largeur.

compression suivant x_1 pour toute valeur de γ_1 telle que : $\gamma_1 = d/\lambda_1 = (2k + 1)/2N$, pour tout $k \geq 0$ et avec γ_1 compris entre 0 et 0,5. En théorie, le mode de Lamb S_0 engendre donc 5 modes de structure pour un composite constitué de 9 périodes pour $\gamma_1 = 1/18, 3/18, 5/18, 7/18, 9/18$. Cependant il n'est pas couplé pour $\gamma_1 = 9/18 = 0,5$ et on obtient quatre modes de structure, en accord avec les quatre résonances observées sur les admittances mutuelles avant la résonance du mode d'épaisseur. Entre ces résonances, on conserve un niveau d'admittance non-nul – même s'il décroît lorsqu'on s'éloigne de l'élément excité – que l'on peut imputer à des interférences constructives du mode S_0 se propageant dans la structure et se réfléchissant partiellement sur les interfaces céramique-résine et sur les bords.

Le nombre de telles contributions augmente avec le nombre de cellules constituant le composite, pendant que leurs amplitudes décroissent. Finalement, pour 49 cellules comme pour le cas périodique, on observe une continuité de modes dans la gamme de fréquences du premier mode de Lamb symétrique. Concernant les modes localisés autour du mode d'épaisseur – contributions du mode de Lamb S_2 [3] à 4 MHz et du premier mode latéral à 8 MHz (comme on le verra plus en détail dans le cas du composite 1-3) – on ne discerne pas de différences entre les trois cas abordés. Les différences les plus notables apparaissent au-dessus de 10 MHz, où les contributions de différents modes se superposent. On note cependant que les admittances mutuelles des deux premiers voisins de la cellule excitée sont extrêmement proches dans les trois cas malgré la proximité du bord du composite dans le cas des 9 périodes. Dans ce dernier cas, les troisième et quatrième voisins sont visiblement soumis à l'influence des conditions aux limites de bord. La conclusion que l'on peut tirer de ces calculs est que même les réseaux modérément longs – à partir de dix périodes – peuvent être efficacement simulés en utilisant le modèle périodique.

On procède ensuite au calcul des admittances mutuelles pour différentes combinaisons de céramique et

de résine en volume. Des fractions volumiques de PZT de 30% et de 70% ont été imposées en fixant, soit la période de la structure à $200\ \mu\text{m}$, soit la largeur du barreau de PZT à $100\ \mu\text{m}$. L'épaisseur du composite reste fixée à $300\ \mu\text{m}$. Dans le premier cas (période fixe), c'est le rapport largeur/hauteur du PZT qui varie. Les différentes géométries considérées sont résumées sur la figure 7.4.

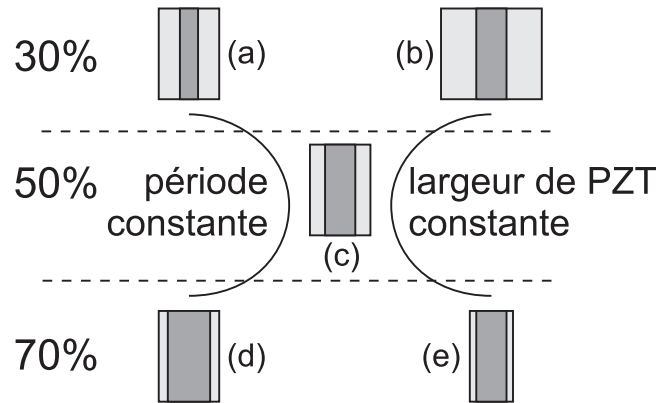


FIG. 7.4 – Géométries considérées pour une analyse comparative des admittances mutuelles. (a) 30% de PZT ($l=60\ \mu\text{m}$, $p=200\ \mu\text{m}$), (b) 30% de PZT ($l=100\ \mu\text{m}$, $p=333\ \mu\text{m}$), (c) 50% de PZT, (d) 70% de PZT ($l=140\ \mu\text{m}$, $p=200\ \mu\text{m}$), et (e) 70% de PZT ($l=100\ \mu\text{m}$, $p=140\ \mu\text{m}$).

Dans les cas (b), (c) et (e), la plage de fréquences du mode S_0 varie logiquement avec la période du composite. Elle croît en même temps que la période décroît. Dans les cas (a), (c) et (d) (période constante), elle varie légèrement autour de 3 MHz. De plus importantes variations sont attendues pour des fractions volumiques de PZT plus faibles ou au contraire plus fortes que celles envisagées. Dans l'absolu, la vitesse du mode S_0 est comprise entre celles du même mode se propageant dans une plaque de résine seule et dans une plaque de PZT.

Le premier mode latéral présente un niveau plus faible pour des fractions volumiques de PZT plus importantes. La vibration pour ce mode est en effet principalement localisée dans la résine. Dans la configuration (b), le premier mode latéral se couple avec le mode d'épaisseur qui s'en trouve fortement dégradé. La configuration (e) présente un couplage entre le mode d'épaisseur et le mode de Lamb S_2 . Ce phénomène est expliqué plus en détails ultérieurement dans le cas du composite 1-3. Les configurations à 70% de PZT présentent l'intervalle le plus grand entre le mode S_0 et le premier mode latéral. Toutefois, le mode d'épaisseur n'est pas centré dans la bande. Le centrer impliquerait d'augmenter la période et par voie de conséquence la largeur du PZT, induisant un rapport largeur/hauteur peu satisfaisant pour le couplage électromécanique. Notons qu'à l'inverse, diminuer la période conduirait à coupler le mode S_0 et le mode d'épaisseur de façon non négligeable. On risquerait d'exciter des modes de structure (modes de compression dans la longueur encore appelés modes *radiaux*) en excitant le mode d'épaisseur. Finalement, une solution intermédiaire entre les configurations (c) et (d) semblerait fournir un bon compromis.

La dernière illustration de l'utilisation des concepts d'admittances harmoniques et mutuelles pour un réseau 1D est le calcul d'admittance harmonique lorsque la période électrique d_e est un multiple de la période mécanique d , calcul développé dans la section 3.2.3. Autrement dit, une même électrode recouvre plusieurs cellules élémentaires.

On utilise les admittances mutuelles calculées précédemment pour les 20 premiers voisins. Au-delà, on suppose que les vibrations sont suffisamment atténuées pour que l'on puisse les négliger. On commence par considérer une structure dont chaque électrode recouvre deux cellules élémentaires. En parallèle, on mène un calcul de validation en utilisant toujours l'approche périodique, mais appliquée à un maillage reproduisant

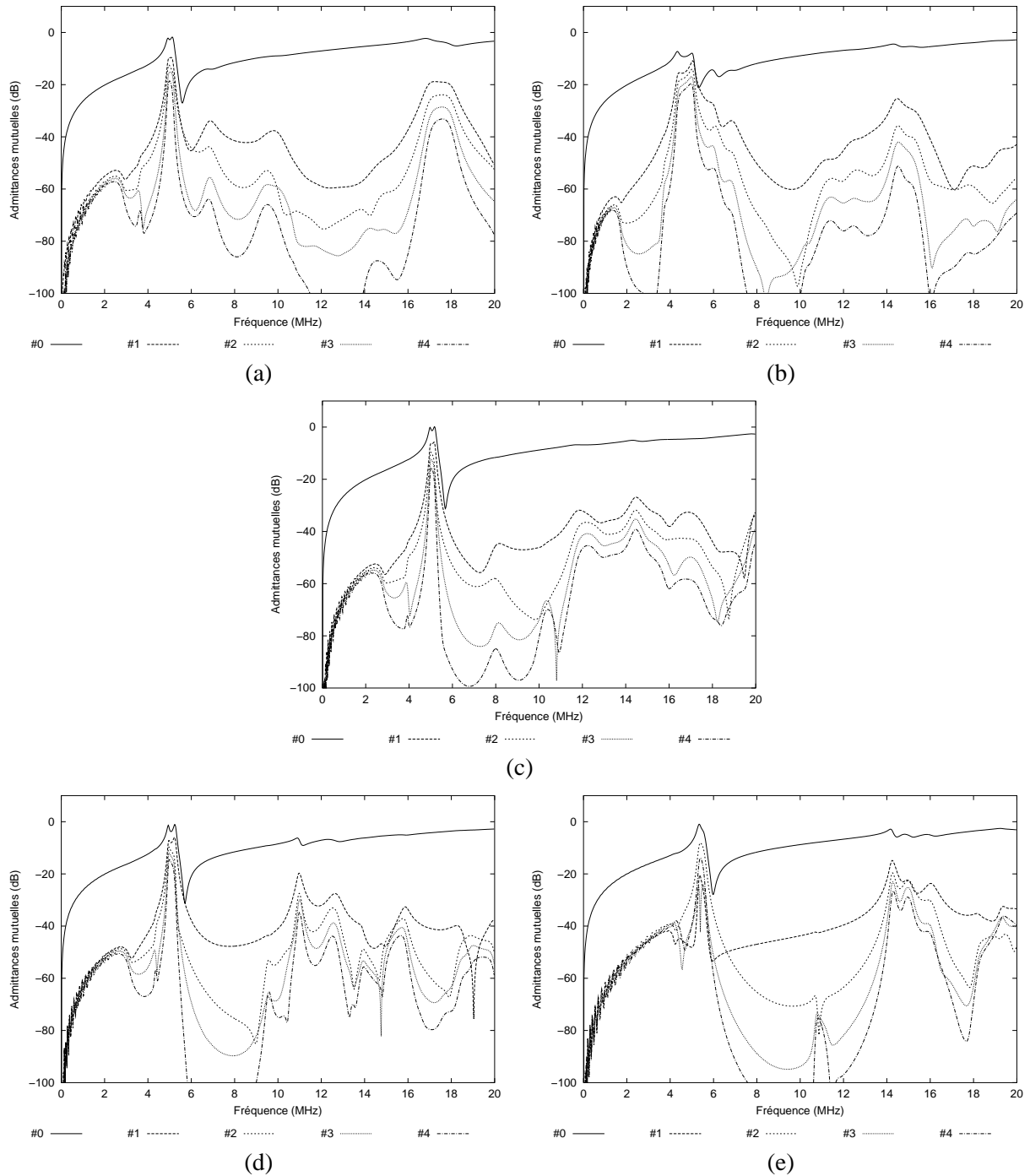


FIG. 7.5 – Admittances mutuelles (en module) calculées pour les structures de la figure 7.4.

cette fois-ci deux cellules élémentaires soumises à un même potentiel. Les deux résultats sont présentés sur la figure 7.6.

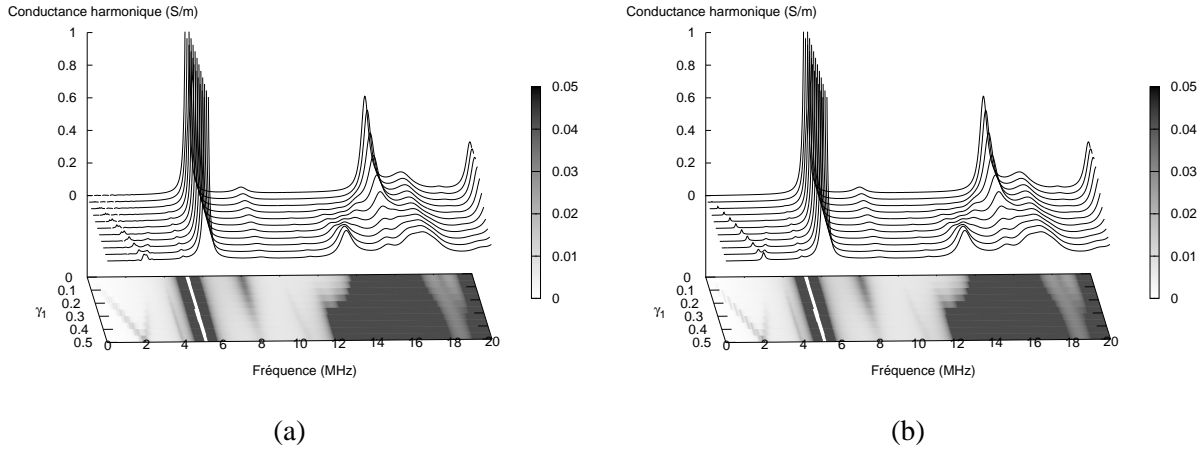


FIG. 7.6 – Admittance harmonique d'un composite dont chaque pixel électrique regroupe deux périodes du réseau. (a) calcul à partir des admittances mutuelles et (b) calcul avec un maillage de deux périodes.

La comparaison montre la validité de l'analyse. Toutefois, on observe des différences à basses fréquences dans la gamme de fréquences du premier mode de Lamb symétrique S_0 . En effet, celui-ci se propage encore au-delà du vingtième voisin et sa contribution ne peut être considérée comme nulle.

Par comparaison avec la courbe 7.2(a), on observe un repliement des modes autour de $\gamma_1^{(1 \text{ période})} = 0, 25$. Ce phénomène est particulièrement visible pour le mode S_0 . De plus, les branches issues du repliement s'atténuent rapidement. Pour la première branche du mode S_0 (entre 0 et 2 MHz), la longueur d'onde suivant x_1 est comprise entre l'infini (vecteur d'onde nul suivant x_1) à $\gamma_1 = 0$ et $2d_e$ à $\gamma_1 = 0,5$. La longueur d'onde, dans le cas de la deuxième branche issue du repliement (entre 2 et 3 MHz), est comprise entre $2d_e$ à $\gamma_1 = 0,5$ et d_e à $\gamma_1 = 0$ (en réalité $\gamma_1 = 1$ avant réduction à la première zone de Brillouin).

Le premier mode latéral, situé autour de 8 MHz, non couplé auparavant pour $\gamma_1^{(1 \text{ période})} = 0,5$, l'est maintenant, du fait de l'excitation en phase de deux transducteurs élémentaires au sein d'une même période électrique, comme le montre la figure 7.7(b). Pour mémoire, le champ de déplacements de ce mode pour $\gamma_1 = 0$ est représenté sur la figure 7.7(a). Le PZT et le polymère vibrent en opposition de phase, le polymère avec une plus grande amplitude que le PZT.

Enfin, on reporte sur la figure 7.8 l'admittance harmonique dans les cas où une électrode recouvre 4 et 6 périodes respectivement. On retrouve pour tout γ_1 une prédominance de l'admittance harmonique à $\gamma_1^{(1 \text{ période})} = 0$ de la courbe initiale. Cela vient de ce que les cellules élémentaires sous une même électrode sont excitées en phase, même si une différence de phase est appliquée entre deux électrodes voisines.

On observe aussi les multiples repliements du mode S_0 . Notons que la longueur d'onde λ_1 pour le deuxième repliement par exemple (troisième branche) est comprise entre d_e à $\gamma_1 = 0$ (ou 1 avant repliement dans la première zone de Brillouin) et $\frac{2}{3}d_e$ à $\gamma_1 = 0,5$ (1,5 avant repliement). Autrement dit la longueur d'onde λ_1 devient inférieure à la période électrique d_e du composite.

7.2 Composites 1-3

Maintenant que l'on s'est assuré de la pertinence des concepts de base de l'approche périodique pour une structure composite 2-2 type, on met la méthode à l'épreuve dans le cas plus complexe d'un composite 1-3.

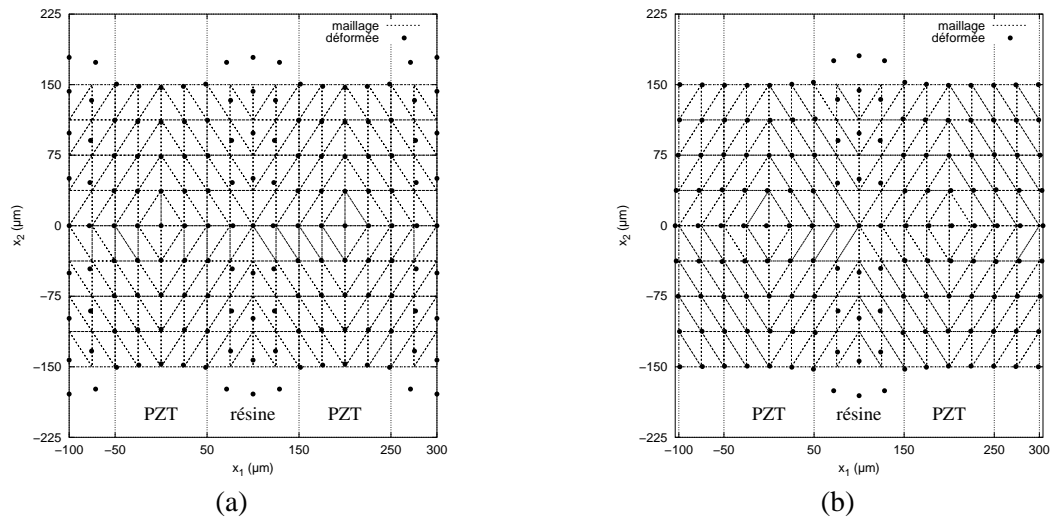


FIG. 7.7 – Champ de déplacements du premier mode latéral pour (a) une excitation en phase et (b) une excitation en opposition de phase d'un composite dont la période électrique est deux fois la période mécanique.

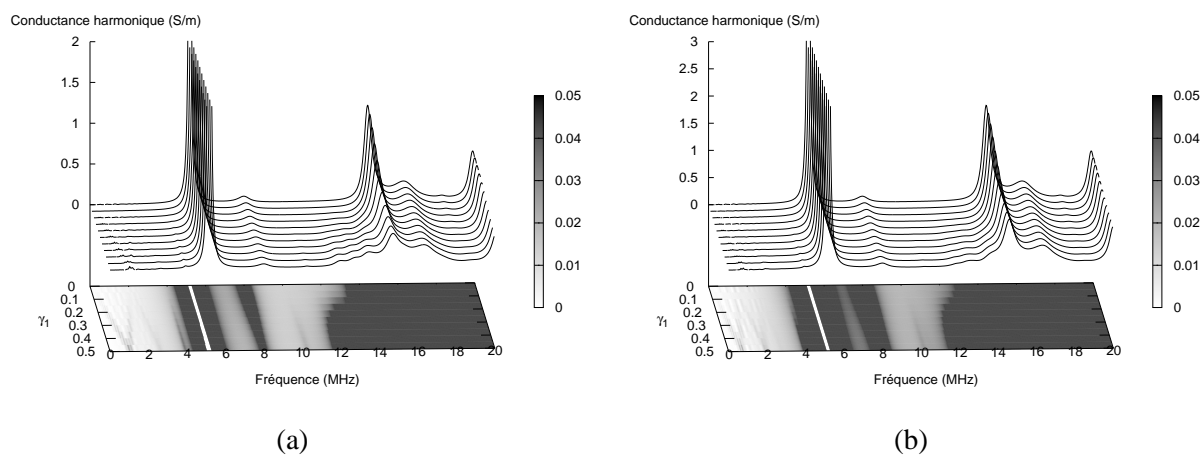


FIG. 7.8 – Admittances harmoniques (partie réelle). Une électrode recouvre (a) quatre éléments ou (b) six éléments.

Le but de cette analyse est double : d'une part valider la méthode sans ambiguïté en confrontant la théorie à l'expérience, d'autre part acquérir une compréhension globale du fonctionnement d'une telle structure et évaluer si celui-ci est comparable à celui d'un composite 2-2.

Comme précédemment on préfère utiliser l'approche éléments finis pour la robustesse et la flexibilité de la méthode, d'autant plus que le composite est étudié en fonctionnement dans le vide et en immersion dans l'huile. On déduit les admittances mutuelles du calcul de l'admittance harmonique. On fait ensuite usage de la méthode de développement en ondes planes afin d'identifier plus précisément la nature des vibrations engendrées dans un composite et mises en évidence dans les calculs d'admittance.

7.2.1 Analyse des couplages inter-éléments

Caractéristiques du transducteur

La structure analysée est un piézocomposite bi-périodique de connectivité 1-3 composé de barreaux de PZT de section carrée entourés d'une résine. Il a été fabriqué au centre technique de Framatome-ANP par usinage classique à la scie. Nous avons fixé la période d du réseau égale à $600 \mu\text{m}$ pour une épaisseur du composite de $900 \mu\text{m}$. Enfin la largeur des barreaux est de $445 \mu\text{m}$, induisant un rapport hauteur/largeur de 2,02 et une fraction volumique de PZT de 0,55. Le PZT est une céramique P1-60 de Saint-Gobain Quartz. Le calcul des constantes de la céramique, à partir des données du fabricant, est donné dans la section D. Les constantes du PZT sont reportées dans la table 7.1.

c_{11}^E, c_{22}^E	12,08	10^{10} N.m^{-2}	e_{15}, e_{24}	11,00	C.m^{-2}
c_{12}^E	7,47	10^{10} N.m^{-2}	e_{31}, e_{32}	-2,73	C.m^{-2}
c_{13}^E, c_{23}^E	7,43	10^{10} N.m^{-2}	e_{33}	15,98	C.m^{-2}
c_{33}^E	10,49	10^{10} N.m^{-2}	$\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{22}^S$	13000	$10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
c_{44}^E, c_{55}^E	2,80	10^{10} N.m^{-2}	ε_{33}^S	7700	$10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
c_{66}^E	2,31	10^{10} N.m^{-2}	ρ	7500	kg.m^{-3}

TAB. 7.1 – Constantes de la céramique P160.

Les constantes de la résine sont calculées à partir des vitesses longitudinale v_l et transverse v_t des ondes élastiques s'y propageant telles que :

$$v_l = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} \text{ et } v_t = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}. \quad (7.1)$$

La vitesse longitudinale est de l'ordre de 2750 m.s^{-1} . La vitesse transverse est mal connue. Pour une résine, elle est de l'ordre de 45 % de la vitesse longitudinale. Le facteur de qualité mécanique est de l'ordre de 80 pour le PZT et de 10 pour la résine. La tangente de l'angle de pertes diélectriques du PZT est donnée à 1 kHz égale à 0,018.

La fréquence de résonance f_r se situe autour de 1,61 MHz, et la fréquence d'antirésonance f_a autour de 1,96 MHz. La formule (4.5) donne un coefficient de couplage électromécanique K autour de 0,61, sachant que le coefficient de couplage k_t pour une plaque est donné égal à 0,49 et le coefficient k_{33} pour une barre est donné égal à 0,7.

Banc de mesures

Afin de mesurer les admittances mutuelles en respectant au plus près leur définition donnée dans la section 3.2.1, on a gravé dix électrodes sur la face supérieure du composite, correspondant à dix cellules

élémentaires. Le composite, une fois fabriqué, a été métallisé pleine plaque sur ses deux faces par pulvérisation cathodique et il est donc nécessaire d'isoler des plots pour accéder aux grandeurs utiles. Le motif de la gravure est reporté sur la figure 7.9(b).

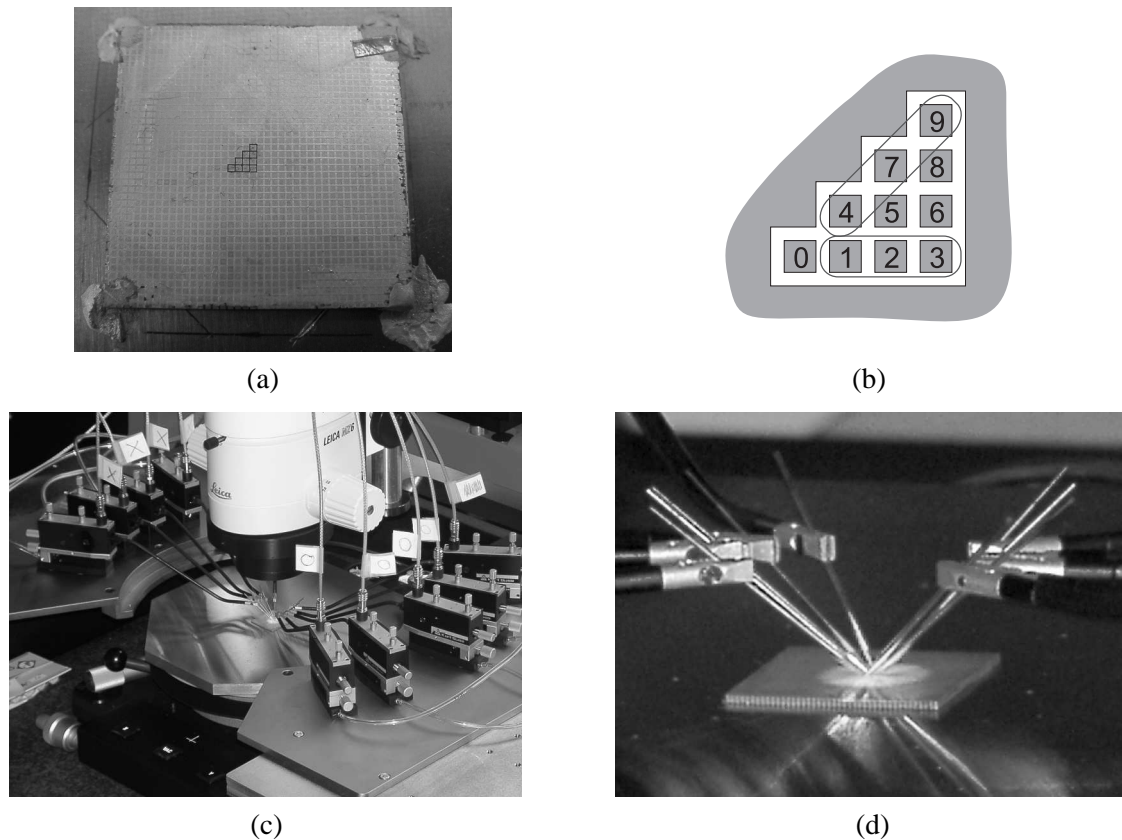


FIG. 7.9 – Photo du composite 1-3 avec les électrodes gravées (a). Schéma du motif des électrodes (b). Banc de mesure sous pointe (c) avec les pointes de touche posées sur les électrodes (d).

La cellule 0 est excitée électriquement par application d'un potentiel harmonique (monochromatique). En dehors de la cellule voisine sondée, les autres cellules sont mises à la masse. Le reste de la surface métallisée entourant le motif est aussi connecté à la masse, afin de se conformer à la définition des admittances mutuelles. En conséquence, on est en mesure, avec le motif formé par les électrodes, de mesurer les admittances mutuelles sur chacune des neuf cellules élémentaires voisines. Un banc de test sous pointes, muni de dix pointes de touche basses fréquences (0 à 10 MHz), est utilisé pour prendre le contact sur chacune des dix électrodes, comme indiqué sur les photos 7.9(c) et 7.9(d). Un analyseur de réseau est utilisé pour mesurer le paramètre de transmission du couple $(0, N)$. Une conversion du paramètre de transmission, effectuée directement par l'analyseur, donne l'admittance mutuelle pour la cellule élémentaire N considérée. Le schéma de la figure 7.10 résume le principe de la mesure.

Enfin, on a gravé les électrodes au milieu du composite à dessein, en s'attendant à ce que les pertes soient suffisantes pour que les effets de bord soient négligeables.

Mesures expérimentales et recalage de constantes

Le calcul des admittances mutuelles pour les cellules 1 à 3 a été réalisé pour plusieurs vitesses transverses des ondes élastiques dans la résine, à savoir 900 m.s^{-1} , 1200 m.s^{-1} et 1300 m.s^{-1} . La partie réelle des admittances obtenues est reportée sur la figure 7.11. Ce calcul est à comparer avec la mesure des ad-

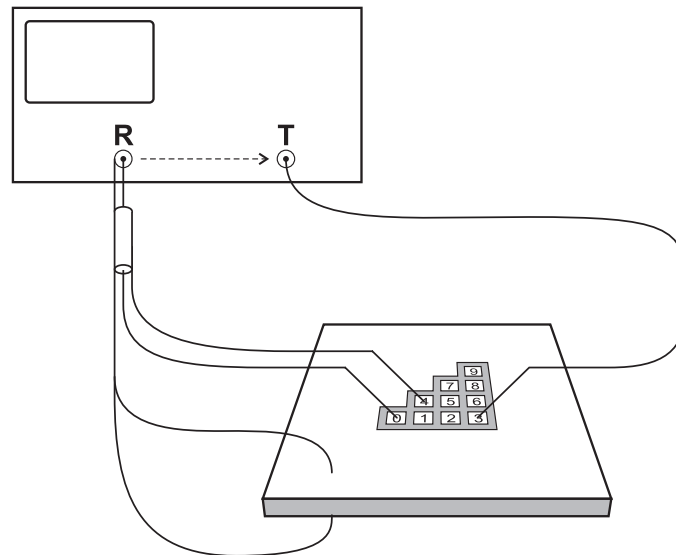


FIG. 7.10 – Schéma de principe de la mesure des admittances mutuelles. Par soucis de lisibilité, la mise à la masse d’une seule cellule (cellule 4) est représentée, alors que, en pratique, toutes les cellules autres que la cellule excitée (cellule 0) et la cellule mesurée (cellule 3) sont référencées.

mittances mutuelles pour les mêmes cellules, reportée sur la figure 7.11(g) et 7.11(h). De prime abord, cette démarche nous permet de recalibrer les constantes de rigidité de la résine, dont la vitesse transverse est de l’ordre de 1300 m.s^{-1} , soit 47 % de la vitesse longitudinale. La mesure de cette vitesse transverse par Framatome a donné par la suite 1280 m.s^{-1} . C’est un point important à noter parce que le calcul des mutuelles permet de recalibrer les vitesses transverses, ce que ne permet pas un calcul et une mesure d’admittance lorsque tout le transducteur est excité en phase. C’est notamment un point important pour les sondes dont les éléments sont découpés puis les interstices remplis de colle dont on ne connaît pas forcément bien toutes les caractéristiques mécaniques.

Vibrations dans l’air

Dans un premier temps, on réalise les mesures d’admittances mutuelles dans l’air, avant de les réaliser en immersion dans l’huile. L’huile a été choisie pour conserver l’isolation électrique des éléments définis par le motif spécifique des électrodes. Cette mesure permet de mettre en évidence les modes couplés de la structure et leurs contributions aux paramètres électriques mesurés.

Admittance harmonique Avant d’accéder aux admittances mutuelles théoriques, il faut d’abord calculer l’admittance harmonique pour tous paramètres d’excitation γ_1 et γ_2 dans la gamme de fréquences désirée.

La figure 7.13 montre la partie imaginaire de la charge $Q_I = G/\omega$, représentative de la conductance harmonique du composite, calculée dans la première zone de Brillouin (voir section C). Elle donne l’évolution de l’admittance harmonique en fonction de la figure d’excitation. Elle peut être considérée comme la courbe de dispersion des modes couplés piézoélectriquement. Pour une telle géométrie de cellule élémentaire avec toutes les symétries afférentes, les bandes d’arrêt absolues de la structure sont mises en évidence sur le diagramme de dispersion, où l’on parcourt le chemin $\Gamma - X - M - \Gamma$ dans le plan des vecteurs d’onde. Ce chemin est suffisant du fait de l’isotropie dans le plan des matériaux. Notons que lorsque les matériaux sont anisotropes, il est nécessaire de parcourir un quart de la première zone de Brillouin, soit le chemin $\Gamma - X - M - Y - \Gamma$ indiqué sur la figure 7.12.

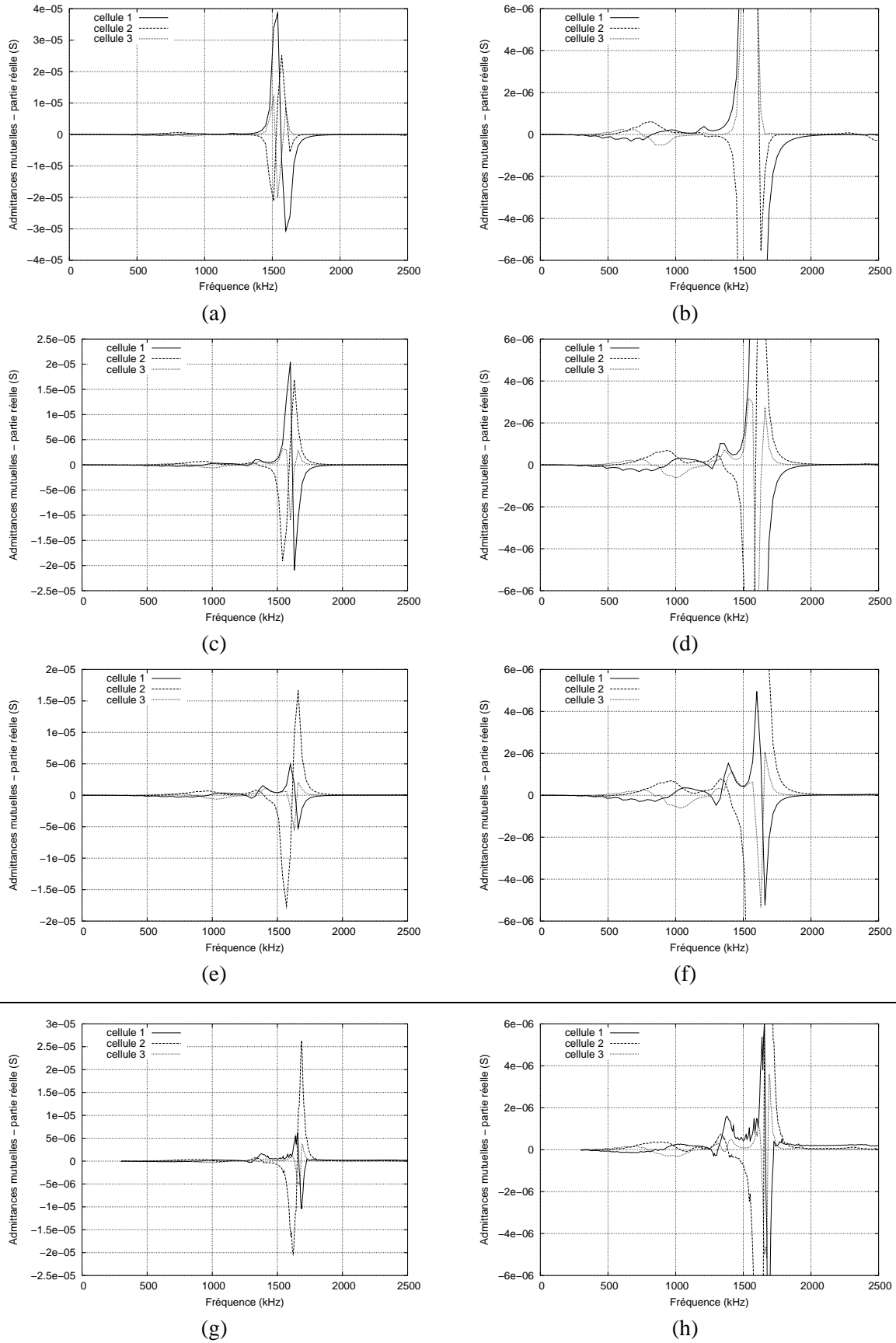


FIG. 7.11 – Calcul des admittances mutuelles des cellules 1 à 3 pour différentes valeurs de la vitesse transverse : 900 m.s^{-1} (a) et (b), 1200 m.s^{-1} (c) et (d), et 1300 m.s^{-1} (e) et (f). Mesure des admittances mutuelles des cellules 1 à 3 (g) et (h).

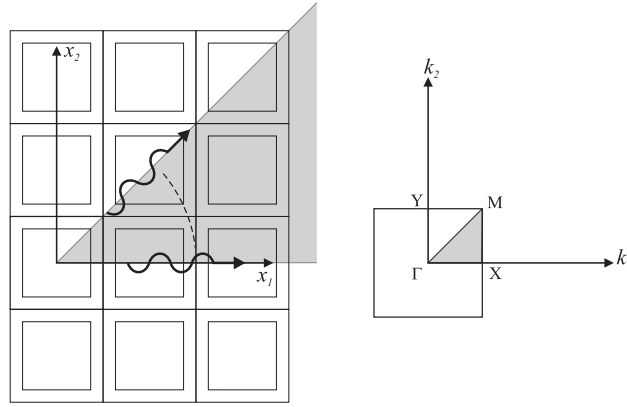


FIG. 7.12 – Propagation des ondes dans la première zone de Brillouin, en tenant compte des symétries de la structure et de l'isotropie des matériaux. Le chemin $\Gamma - X - M - \Gamma$ suffit à rendre compte des bandes d'arrêt de la structure.

Le point Γ correspond à une excitation de tout le réseau en phase, c'est-à-dire que les paramètres d'excitation γ_1 et γ_2 sont nuls. Au point X , γ_2 est toujours nul mais γ_1 est égal à 0,5. Cela signifie que deux lignes de cellules, adjacentes suivant l'axe x_1 , sont en opposition de phase. Entre les points Γ et X , un déphasage est introduit entre deux lignes adjacentes. Ce déphasage varie linéairement de 0 à π . Cela signifie aussi que les modes se propagent suivant l'axe x_1 sur le chemin $\Gamma - X$, tandis qu'ils se propagent suivant la diagonale de la cellule élémentaire sur le chemin $\Gamma - M$ (figure 7.12).

Le niveau de la conductance n'est jamais nul à cause des pertes intrinsèques des matériaux qui font qu'il y a toujours un peu de couplage. L'existence de bandes d'arrêt absolues n'est établie que de façon subjective, en considérant l'homogénéité des zones claires sur le diagramme.

Pour γ_1 et γ_2 nuls, on observe d'abord autour de 1,6 MHz le mode de compression fondamental, encore appelé mode d'épaisseur ou mode *piston*. Sa vitesse de groupe (vitesse de l'énergie) dans le plan du réseau est non-nulle pour γ_1 et γ_2 différents de 0 et 0,5. Le caractère propagatif du mode d'épaisseur est dû au couplage des barreaux de PZT par la résine.

À des fréquences inférieures, deux modes spécifiques se propagent dans le réseau quand γ_1 et γ_2 sont différents de 0 et 0,5. En utilisant les notations de la référence [3] pour les modes de plaque, et grâce à la visualisation des champs de déplacements, ces deux modes sont identifiés comme les premier et troisième modes de Lamb symétriques S_0 et S_2 , avant leurs premières bandes d'arrêt respectives. Leur longueur d'onde varie entre l'infini en Γ et deux fois la période en X , si on considère la propagation suivant l'axe x_1 .

Comme on le voit plus loin, les modes couplés à plus haute fréquence pour γ_1 et γ_2 différents de 0 et 0,5 sont, soit les modes de Lamb symétriques d'ordres plus élevés et pairs (S_4 , S_6 , etc., i.e. augmentation de la composante normale k_3 du vecteur d'onde), soit les repliements de ces modes de Lamb symétriques dans la première zone de Brillouin (augmentation de la composante coplanaire k_{\parallel} du vecteur d'onde). Dans le dernier cas, la longueur d'onde passe en-dessous de la période et des phénomènes de diffraction de Bragg apparaissent comme c'est déjà le cas pour les modes latéraux. Quelques uns de ces modes apparaissent sur le diagramme de dispersion malgré leurs faibles couplages par rapport au mode d'épaisseur. On se heurte ensuite, pour les modes d'ordres plus élevés, à la limite de pertinence de l'échantillonnage spatial lié au maillage.

La figure 7.14 montre le maillage de la cellule élémentaire, ainsi que la forme des modes S_0 et S_2 pour $\gamma_1 = 0,25$ et $\gamma_2 = 0$ à 775 kHz et 1300 kHz respectivement, et pour γ_1 et γ_2 égaux à 0,25 à 920 kHz et 1330 kHz respectivement. Dans le premier cas, l'échelle de gris indique pour les deux modes la

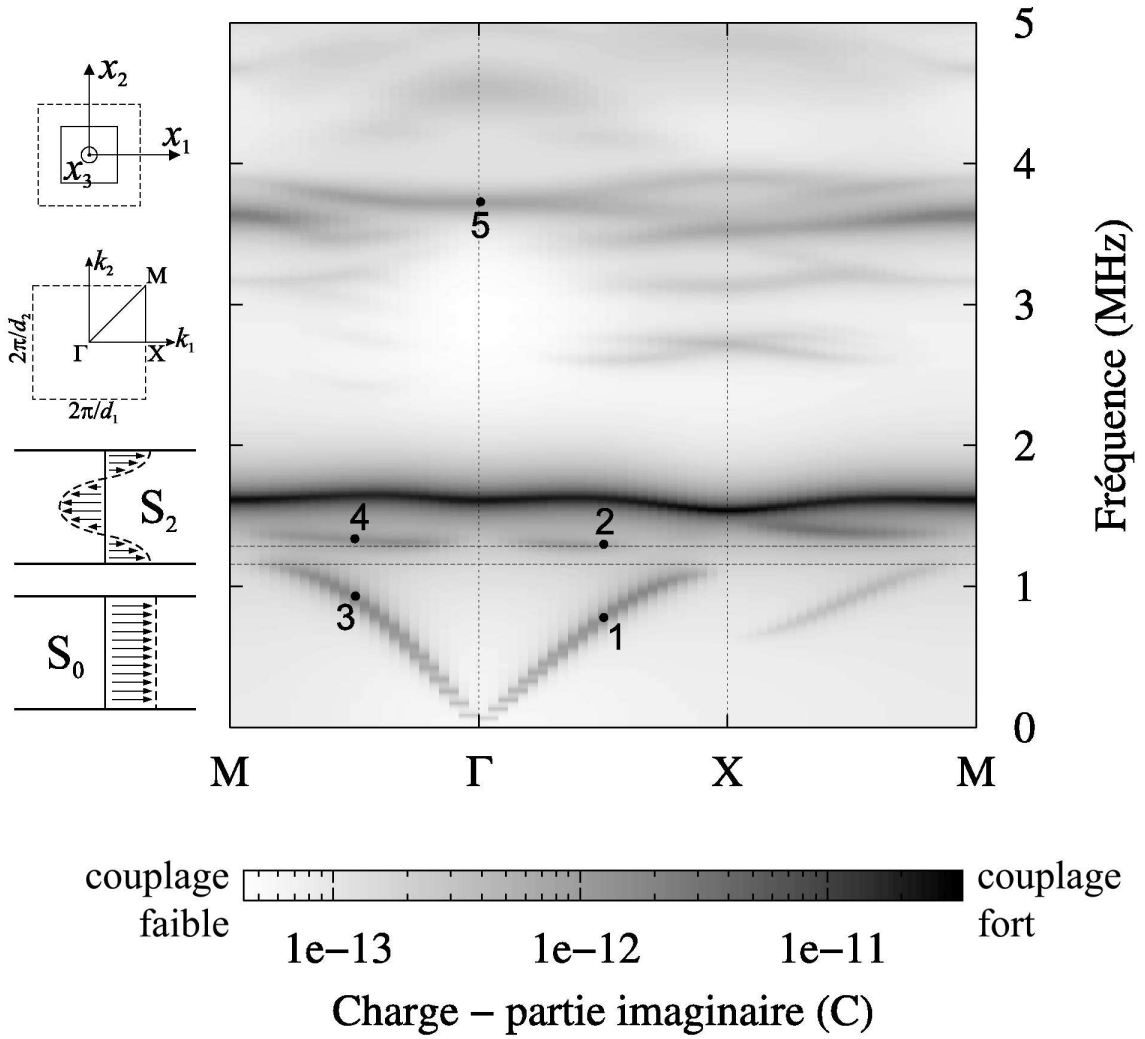


FIG. 7.13 – Admittance harmonique suivant le chemin $M - \Gamma - X - M$ dans la première zone de Brillouin. Les lignes pointillées correspondent à une bande d'arrêt absolue séparant le mode S_0 et le mode S_2 , schématisé à gauche de la figure d'admittance. Sont aussi représentées la cellule élémentaire dans le réseau direct et la première zone de Brillouin dans le réseau réciproque.

phase des déplacements suivant l'axe x_1 , conforme aux diagrammes des deux modes donnés sur la figure 7.13. La différence de rigidité des deux matériaux est tout à fait visible entre le barreau de céramique et l'enrobage de résine. Si l'on considère le mode S_2 et qu'on visualise le barreau seul, tout se passe comme si celui-ci vibre sur un mode de flexion. Notons enfin qu'une interpolation de degré deux est utilisée dans l'analyse par éléments finis et que les noeuds internes aux éléments (milieux des arêtes) n'apparaissent pas sur les déformées de la figure. L'interpolation de second degré, qui utilise des éléments quadratiques dont les polynômes d'interpolation sont de degré deux, améliore la convergence de la méthode.

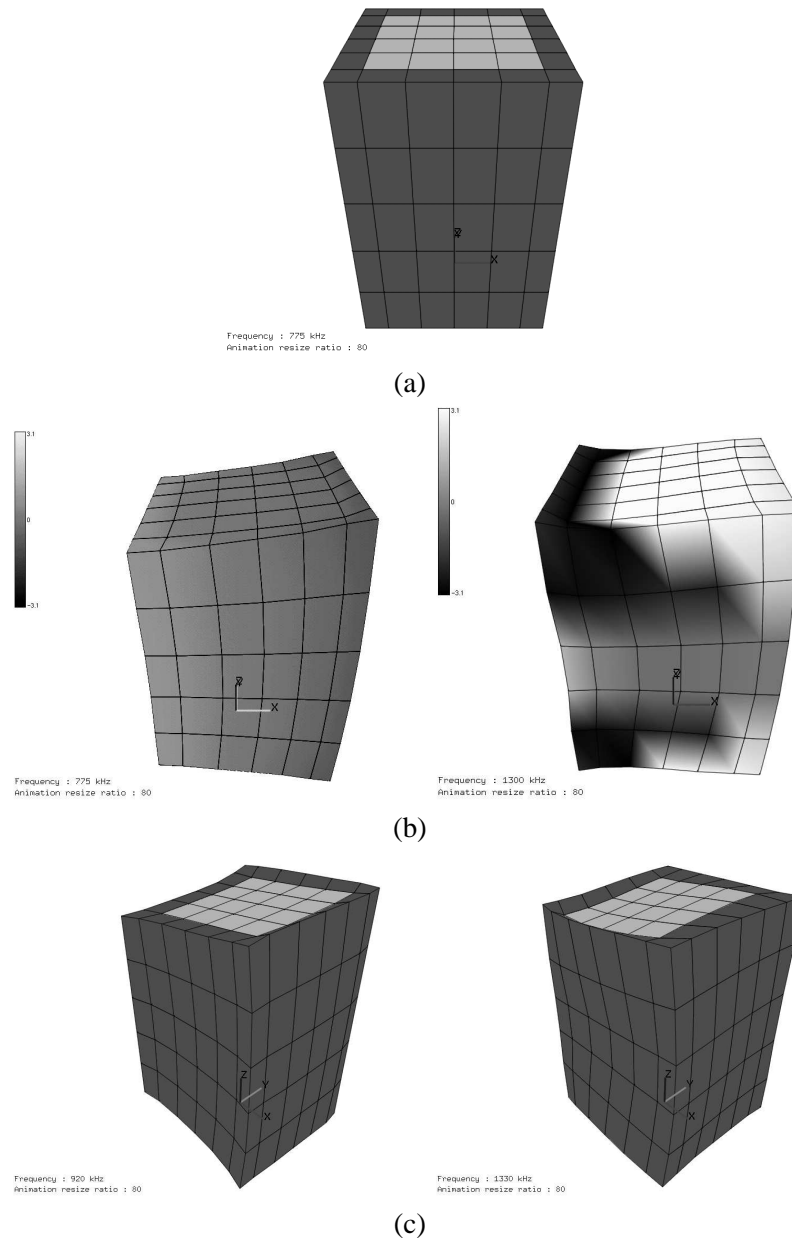


FIG. 7.14 – (a) Maillage de la cellule élémentaire. Déformées des modes S_0 et S_2 (b) pour $\gamma_1 = 0,25$ et $\gamma_2 = 0$ (propagation suivant x_1) à 775 kHz et 1300 kHz respectivement, et (c) pour γ_1 et γ_2 égaux à 0,25 (propagation suivant la diagonale) à 920 kHz et 1330 kHz respectivement. La phase des déplacements suivant x_1 est indiquée en niveau de gris dans le premier cas (propagation suivant x_1) et l'échelle va de $-\pi$ à π . Les positions de ces modes sur le diagramme de dispersion sont indiquées par des numéros de 1 à 4 respectivement.

On observe ensuite une bande d'arrêt entre le mode d'épaisseur et une fréquence de l'ordre de 2400 kHz.

Au-delà de cette fréquence, de nombreux modes apparaissent, dont un bon nombre sont les modes latéraux dus à la diffraction de Bragg [28]. A cause de la nature composite de la structure, on voit apparaître de nombreux modes latéraux ainsi que leurs harmoniques dans l'épaisseur, plus ou moins couplés, et il devient difficile de les distinguer les uns des autres, même en observant leurs déformées. Le troisième harmonique du mode d'épaisseur, classiquement observé dans le cas d'une plaque homogène, n'existe plus dans le composite si l'on considère un mode pur, à cause de la conversion d'énergie entre le mode de compression et les modes latéraux successifs. On met ce phénomène en évidence par la suite.

La figure 7.15 montre la vibration du mode latéral couplé à 3700 kHz. Celui-ci correspond au troisième harmonique du premier mode latéral déjà souvent décrit (voir section 2.4.5), pour lequel les coins de la cellule élémentaire vibrent en opposition de phase avec le barreau de céramique et, qui plus est, avec une amplitude plus grande. Notons que les deux premiers modes latéraux fondamentaux sont situés à des fréquences entre 2400 kHz et 3000 kHz, mais ils ne sont pas suffisamment couplés pour être visibles sur le diagramme de dispersion, soit du fait de l'échelle utilisée, soit à cause de la proximité de la résonance du mode piston. Leur existence est visible si on visualise l'évolution de la vibration de la structure en fonction de la fréquence. D'autre part, leur présence a été aussi décelé sur une mesure de déplacement hors-plan du dispositif, à l'aide d'une sonde optique interférométrique hétérodyne.

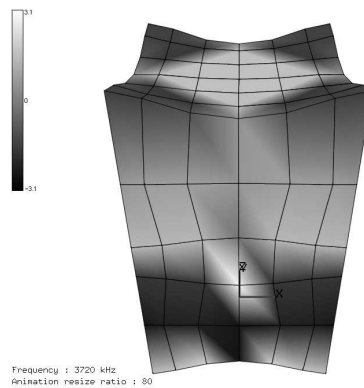


FIG. 7.15 – Déformée du mode latéral couplé autour de 3700 kHz, pour γ_1 et γ_2 nuls. Il est repéré par le numéro 5 sur le diagramme de dispersion de la figure 7.13. La phase des déplacements suivant l'axe x_3 (vertical) est indiquée en niveaux de gris avec une échelle variant entre $-\pi$ et π .

Admittances mutuelles et diaphonie De l'admittance harmonique calculée pour tout triplet $(\gamma_1, \gamma_2, \omega)$, on déduit les admittances mutuelles par intégration suivant l'équation (3.8). Pour chaque pulsation ω , on réalise une intégration numérique suivant une méthode de Gauss [75] avec 26 points d'intégration pour γ_1 et γ_2 respectivement dans l'intervalle d'intégration $[0; 1]$. Les figures 7.16(a) et 7.16(b) montrent les admittances mutuelles en parties réelle et imaginaire pour les trois cellules voisines suivant l'axe x_1 numérotées de 1 à 3 et les trois cellules voisines sur la diagonale numérotées 2, 5 et 9. Les figures 7.17(a) et 7.17(b) sont un agrandissement des figures pré-citées. Par soucis de lisibilité et pour une comparaison aisée, le domaine de fréquence a été réduit à 3 MHz et une échelle réduite en admittance est aussi utilisée.

La figure 7.18 donne les mêmes résultats en amplitude et en phase avec en plus l'admittance de la cellule excitée (auto-admittance). Cette dernière représentation permet notamment d'évaluer les niveaux de diaphonie tandis que la première est plus propice à la comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.

Pour des fréquences inférieures à 1,2 MHz, on observe des contributions dont l'amplitude augmente avec la fréquence et qui forme comme un continuum de modes. On associe ces contributions au mode S_0 identifié

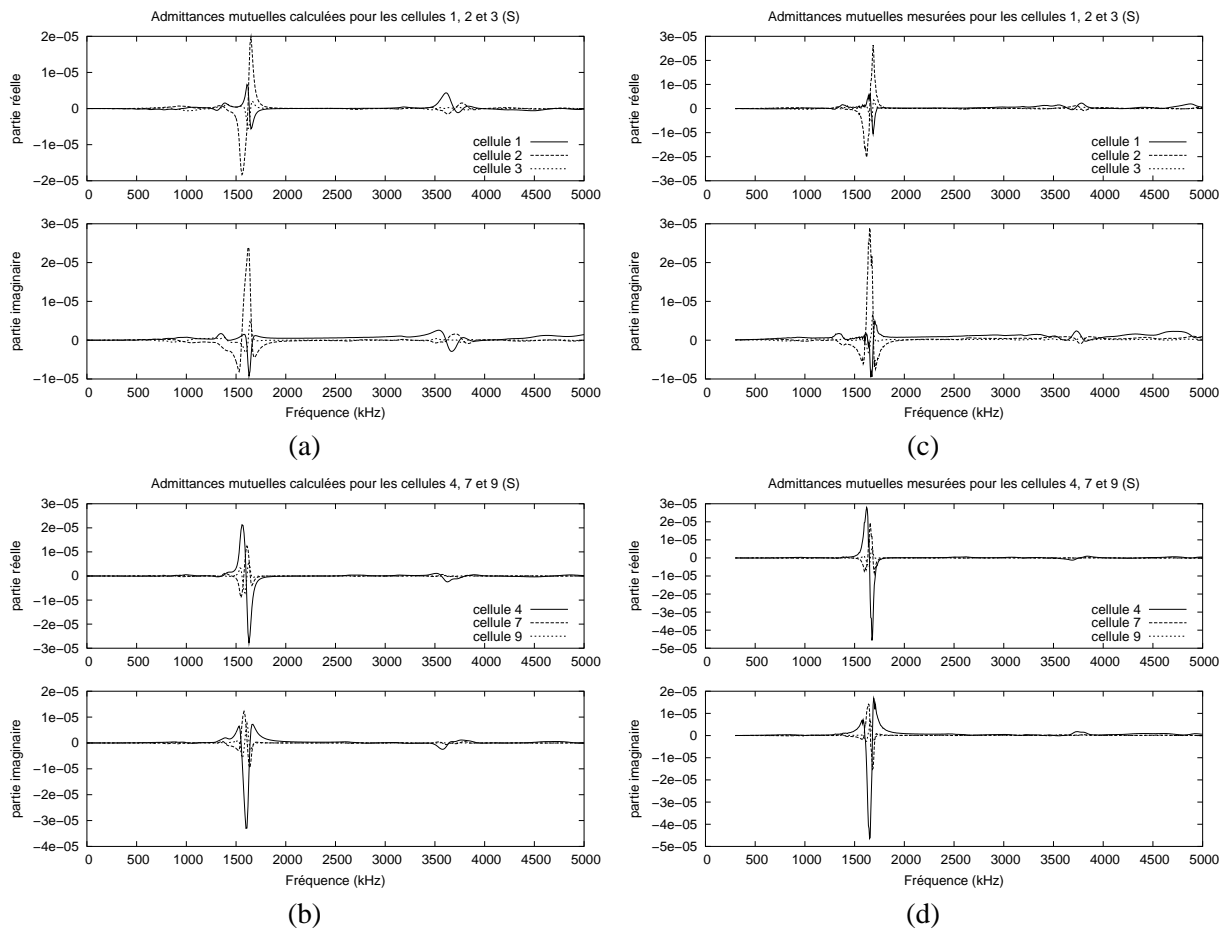


FIG. 7.16 – Admittances mutuelles pour les cellules (a)-(c) 1,2 et 3, et (b)-(d) 4, 7 et 9, respectivement calculées par transformée de Fourier de l'admittance harmonique et mesurées avec le dispositif expérimental présenté plus haut.

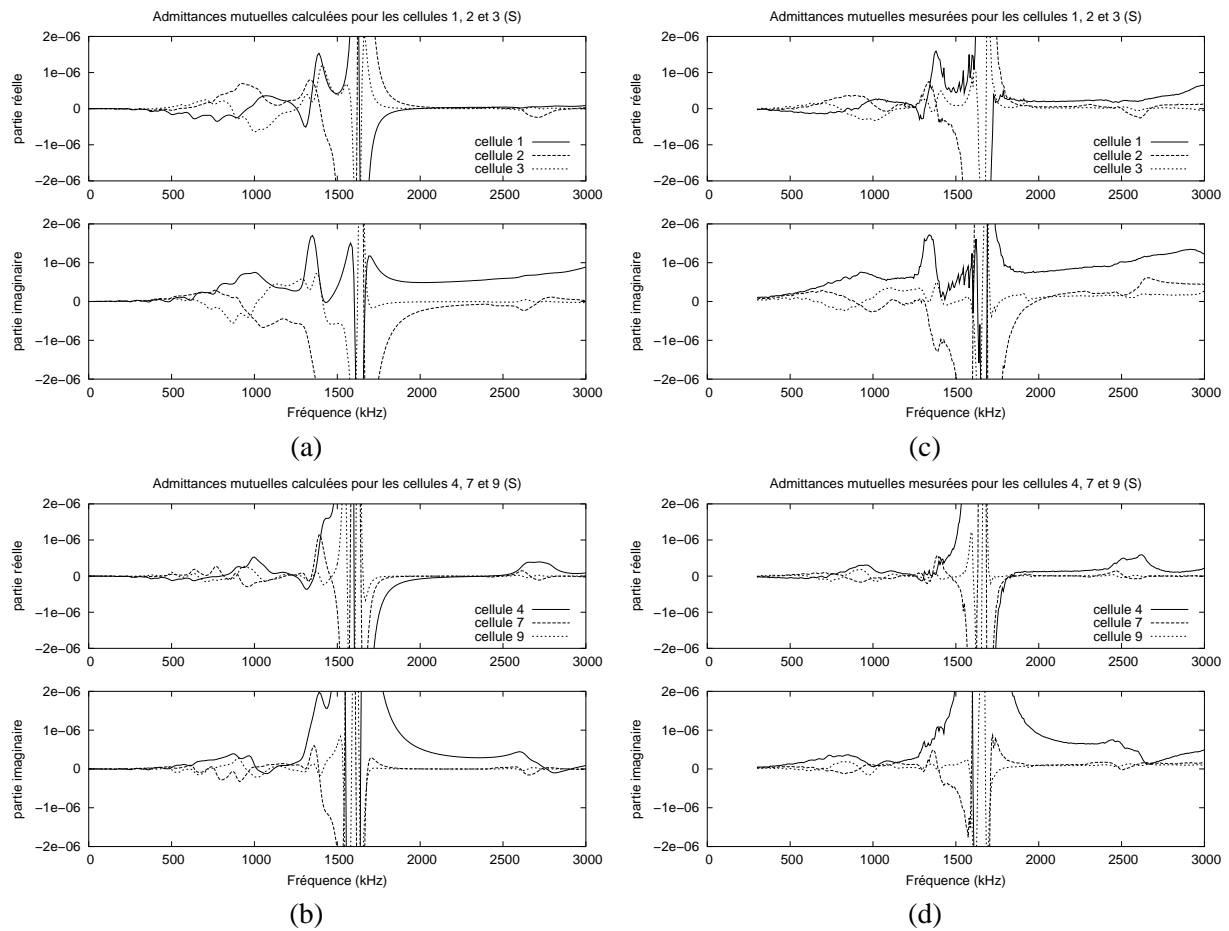


FIG. 7.17 – Agrandissement de la figure 7.16

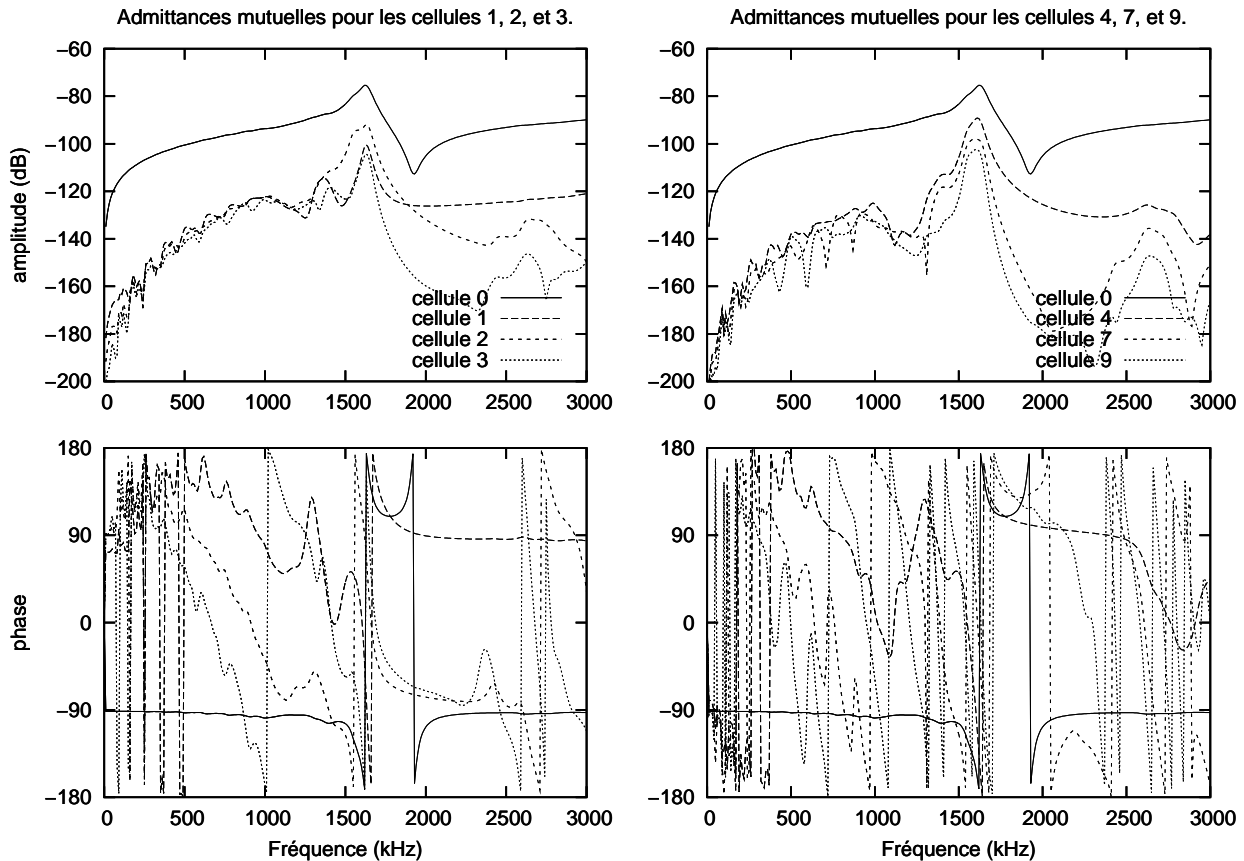


FIG. 7.18 – Admittances mutuelles calculées en amplitude et phase.

précédemment sur l'admittance harmonique et dont les branches apparaissent sur les courbes de dispersion à ces fréquences. Par définition, les admittances mutuelles contiennent toutes les figures d'excitation en γ_1 et γ_2 . Ces contributions semblent plus couplées au fur à mesure que la fréquence augmente, puis diminuent lorsque l'on atteint l'entrée de la bande d'arrêt.

Une contribution plus forte est ensuite observée dans une bande de fréquences autour de 1,35 MHz qui correspond aux branches du mode S_2 . Notons de nouveau que le diagramme de dispersion fait apparaître une bande d'arrêt absolue entre les modes S_0 et S_2 . Cette bande d'arrêt est identifiable sur les courbes d'admittances mutuelles. On se reportera à la figure 7.18 sur laquelle elle est plus aisément identifiable.

On trouve ensuite une importante contribution centrée sur 1,6 MHz. Celle-ci correspond au mode d'épaisseur du plot excité qui entraîne les cellules voisines dans son mouvement. De plus, comme on l'a vu sur le diagramme de dispersion, le mode d'épaisseur, comparable au mode de Lamb S_1 , possède une vitesse de groupe non-nulle en-dehors des points remarquables Γ , X et M en bordure de zone de Brillouin, et de l'énergie est perdue dans le réseau lorsque l'on fait vibrer une cellule élémentaire.

Aux fréquences supérieures, d'importantes contributions apparaissent à partir de 3,5 MHz, qui sont dues notamment à des modes latéraux comme celui représenté sur la figure 7.15. A cause du grand nombre de modes (latéraux et autres repliements des modes de Lamb évoqués précédemment) présents dans cette gamme de fréquences, et parce que ceux-ci se superposent, il est relativement difficile de déduire les contributions de chacun aux admittances mutuelles.

Les figures 7.16(c) et 7.16(d) montrent les admittances mutuelles mesurées comme décrit en page 120. Comme dans le cas théorique, les figures 7.17(c) et 7.17(d) sont un agrandissement.

Dans le domaine de fréquences de 0 à 3 MHz, on obtient un très bon accord entre les calculs et les

mesures, que ce soit en termes de localisation spectrale des modes ou en termes d'ordres de grandeurs des contributions des différents modes. Au-delà de 3 MHz, la comparaison donne des résultats moins significatifs, même si les calculs fournissent des résultats pertinents d'un point de vue qualitatif. On peut invoquer plusieurs raisons à cela. Parce que les modes latéraux présentent des longueurs d'ondes dans le plan (x_1, x_2) du réseau inférieures à la période, il est certainement nécessaire d'affiner encore le maillage le long de ces axes, pour obtenir une bonne précision sur la localisation spectrale de ces modes. Ce rééchantillonnage spatial n'a pas été réalisé faute de temps, d'autant plus qu'un maillage plus fin implique une augmentation non négligeable du temps de calcul pour accéder aux mutuelles. Ensuite, il règne un certain nombre d'incertitudes sur les constantes du PZT utilisé dans le composite ainsi que sur les constantes mécaniques de la résine malgré le recalage. Les pertes mécaniques des deux matériaux ne sont pas moins faciles à déterminer, d'autant plus que nous avons supposées celles-ci identiques pour toutes les constantes – alors qu'elles sont différentes en compression et en cisaillement – et indépendantes de la fréquence.

Néanmoins, les niveaux de diaphonie sont correctement prévus par le calcul, tant en absolu puisque les valeurs d'admittance prévues sont très proches de la réalité, que relativement puisque le niveau de transmission entre la cellule excitée et ses voisines proches est correctement évalué. On peut en voir la comparaison sur la figure 7.19. Le bruit de mesure peut expliquer ce qui ressemble à un palier de bruit autour de -140 dB. Celui-ci n'est évidemment pas pris en compte dans nos simulations.

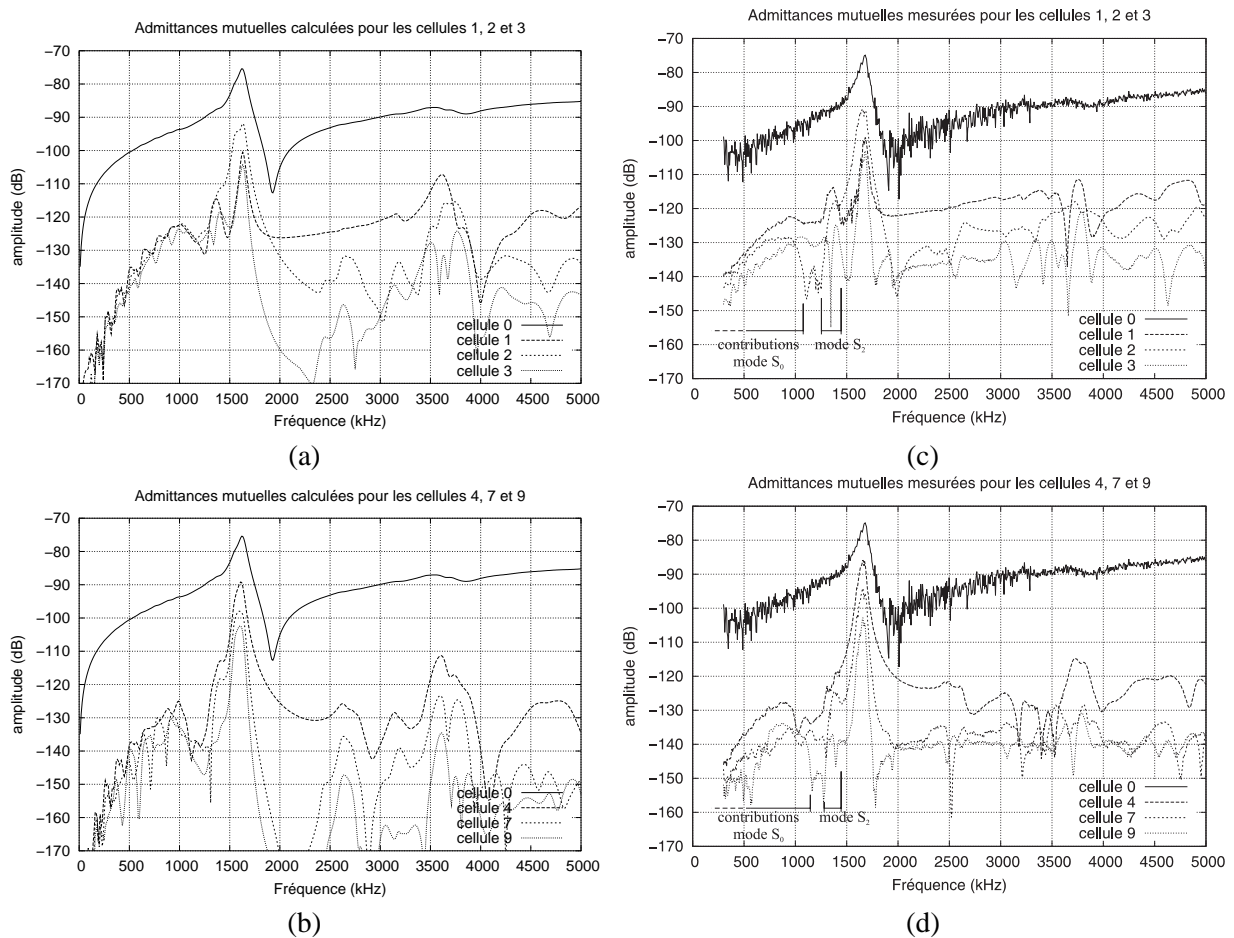


FIG. 7.19 – Admittances mutuelles calculées et mesurées et auto-admittance (admittance mutuelle de la cellule excitée).

Un phénomène intéressant se produit à la fréquence du mode d'épaisseur. Le long de la diagonale, les admittances mutuelles décroissent régulièrement avec environ une différence de 10 dB entre chaque

cellule. Le comportement des cellules 1 à 3 est plus inattendu. La décroissance n'est pas régulière. En effet, l'admittance mutuelle de la cellule 2 est plus grande que celle des cellules 1 et 3. Entre la cellule 0 et les cellules 1 et 3, on a respectivement 25 dB et 30 dB de chute, tandis que la seconde cellule présente seulement 15 dB de différence avec la cellule excitée. On rapproche ce comportement de la proximité spectrale du mode d'épaisseur et du mode S_2 , en raisonnant comme suit.

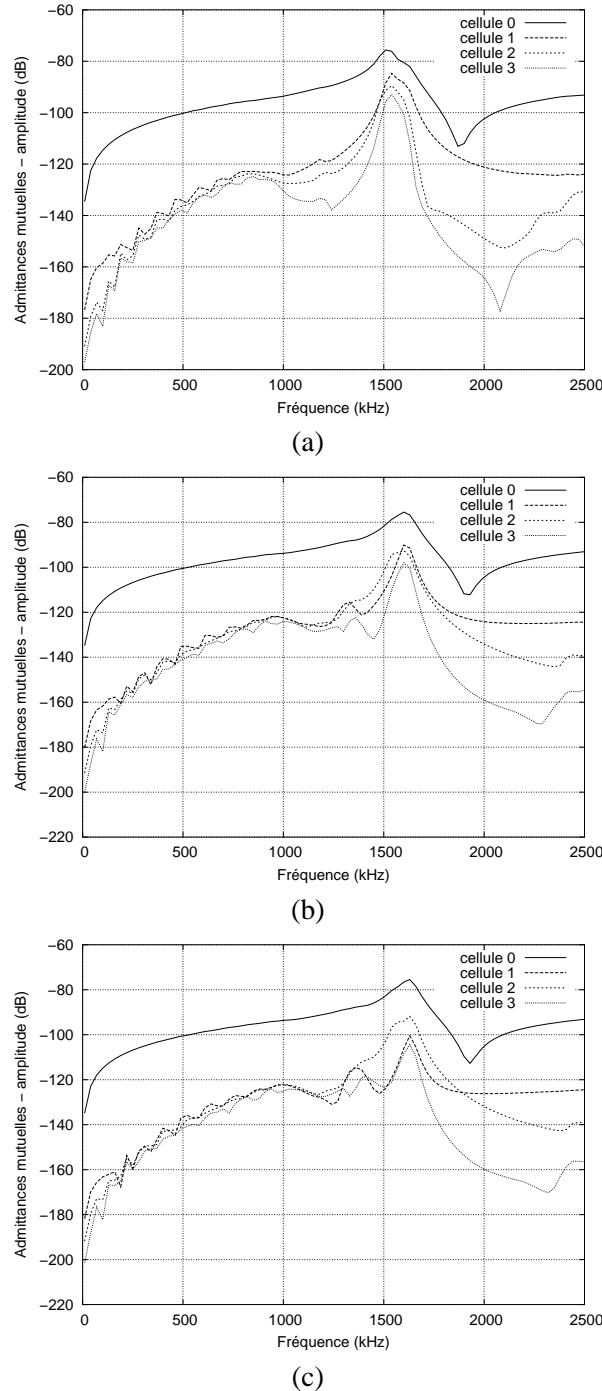


FIG. 7.20 – Amplitude des admittances mutuelles des cellules 0 à 3 pour différentes vitesses transverses de la résine : (a) 900 m.s^{-1} , (b) 1200 m.s^{-1} et (c) 1300 m.s^{-1} .

Faisons varier comme précédemment (page 121) la vitesse transverse des ondes élastiques dans la résine. L'analyse de l'admittance harmonique de la figure 7.13 et des différentes contributions engendrées sur les admittances mutuelles nous permet de déterminer la contribution issue du mode S_2 pour chaque vitesse

transverse considérée. On observe sur la figure 7.20 une translation vers le haut de la bande de fréquences des contributions du mode S_2 , ainsi qu'un couplage progressif entre celui-ci et le mode d'épaisseur. Ce phénomène est plus aisément visible si on regarde de plus près le cas de la cellule 1, dont le niveau de l'admittance à 1,6 MHz, relativement aux autres cellules, varie fortement avec la proximité du mode S_2 . Si on excite la cellule 0, celle-ci et la cellule 2 vibrent principalement sur leurs modes d'épaisseur tandis que les cellules 1 et 3 présentent un comportement de vibration en flexion similaire à la forme du mode S_2 pour le barreau de céramique. Le schéma 7.21 résume ce comportement.

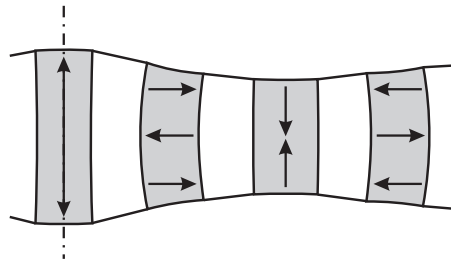


FIG. 7.21 – Représentation du phénomène de couplage entre le mode d'épaisseur et le mode transverse S_2 .

Les courbes de la figure 7.18 confortent cette interprétation lorsque l'on examine la phase entre les fréquences de résonance (1,6 MHz) et d'antirésonance (1,9 MHz). Les cellules 0 et 2 vibrent en opposition de phase avec les cellules 1 et 3.

On peut aussi trouver une source de compréhension dans le fait que les ondes longitudinales et transverses verticales, toutes polarisées dans le plan sagittal de la plaque, se couplent sur une interface [3], qui est le siège de conversions partielles. On peut supposer d'une part que les surfaces supérieures et inférieures du composite jouent un rôle dans ce phénomène représenté sur la figure 7.22. La proximité des fréquences de résonance du mode d'épaisseur de polarisation principalement longitudinale et du mode S_2 de polarisation principalement transverse favorise ces conversions. D'autre part les interfaces PZT-résine peuvent aussi être le siège de ces conversions, conversions d'autant plus efficaces que les interfaces en jeu sont parallèles entre elles et normales à la direction de propagation de l'onde. Il semble en effet que ce phénomène n'a pas lieu lorsque l'on considère la diagonale du réseau.

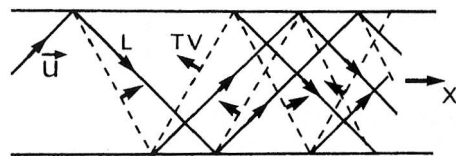


FIG. 7.22 – Propagation des ondes L (longitudinales) et TV (transverses verticales) dans une plaque. D'après [3].

Finalement, ce couplage peut être dû à un mélange subtil de ces causes potentielles et son explication n'est pas aisée malgré toutes les informations apportées par notre outil.

Vibrations en immersion

On réalise ensuite les mêmes calculs et les mêmes mesures en plaçant le composite en immersion dans un bain d'huile (fluide diélectrique) comme sur la figure 7.23. L'huile est choisie pour éviter d'avoir à ajouter une quelconque protection sur les électrodes. Ainsi on peut toujours poser les pointes sur les pixels pour prendre le contact sans risque de court-circuit entre les cellules élémentaires, et pire encore entre les

électrodes supérieures et la contre-électrode en face arrière.

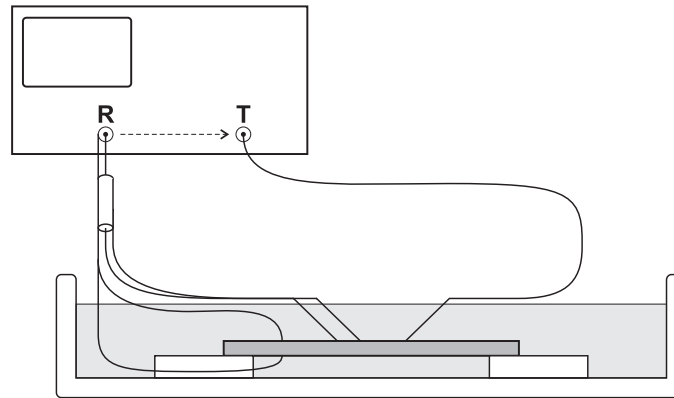


FIG. 7.23 – Schéma de principe de la mesure des admittances mutuelles, en immersion dans l'huile.

En plus de l'ajout de conditions de périodicités, les calculs exploitent la formulation du rayonnement des structures périodiques décrite dans la section 5.4. En pratique, comme précédemment, seule une cellule élémentaire du réseau est maillée – le maillage est celui de la figure 7.14(a) – et le rayonnement est pris en compte par l'application de conditions spécifiques sur les faces inférieure et supérieure de la cellule au travers des éléments de frontière. L'huile est remplacée par un fluide parfait de même propriétés mécaniques (vitesse de l'onde acoustique et masse volumique) et sa viscosité n'est pas prise en compte (bien qu'il sera possible de le faire dans des travaux futurs [76]).

admittance harmonique : influence du rayonnement dans l'huile La figure 7.24 compare l'admittance théorique du composite vibrant dans le vide et dans le fluide lorsque toutes les cellules du réseau sont excitées en phase ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$).

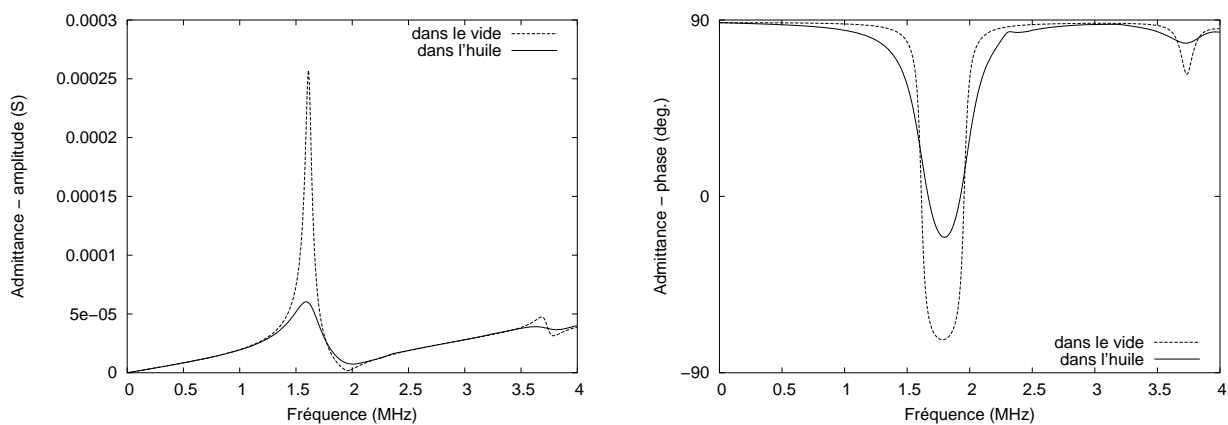


FIG. 7.24 – Admittances harmoniques comparées du composite vibrant dans le vide et en immersion dans l'huile, pour une excitation synchrone ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$).

Comme on pouvait s'y attendre, la présence de l'huile provoque une diminution du facteur de qualité tant à la résonance qu'à l'antirésonance (amplitude divisée par cinq à la résonance). Elle s'accompagne d'un léger décalage de la fréquence de résonance de 1,61 MHz à 1,59 MHz.

L'admittance harmonique dans la première zone de Brillouin, autrement dit le diagramme de dispersion des modes couplés, est reporté sur la figure 7.25.

Si on retrouve les modes de Lamb décrits précédemment, on trouve aussi d'autres contributions remar-

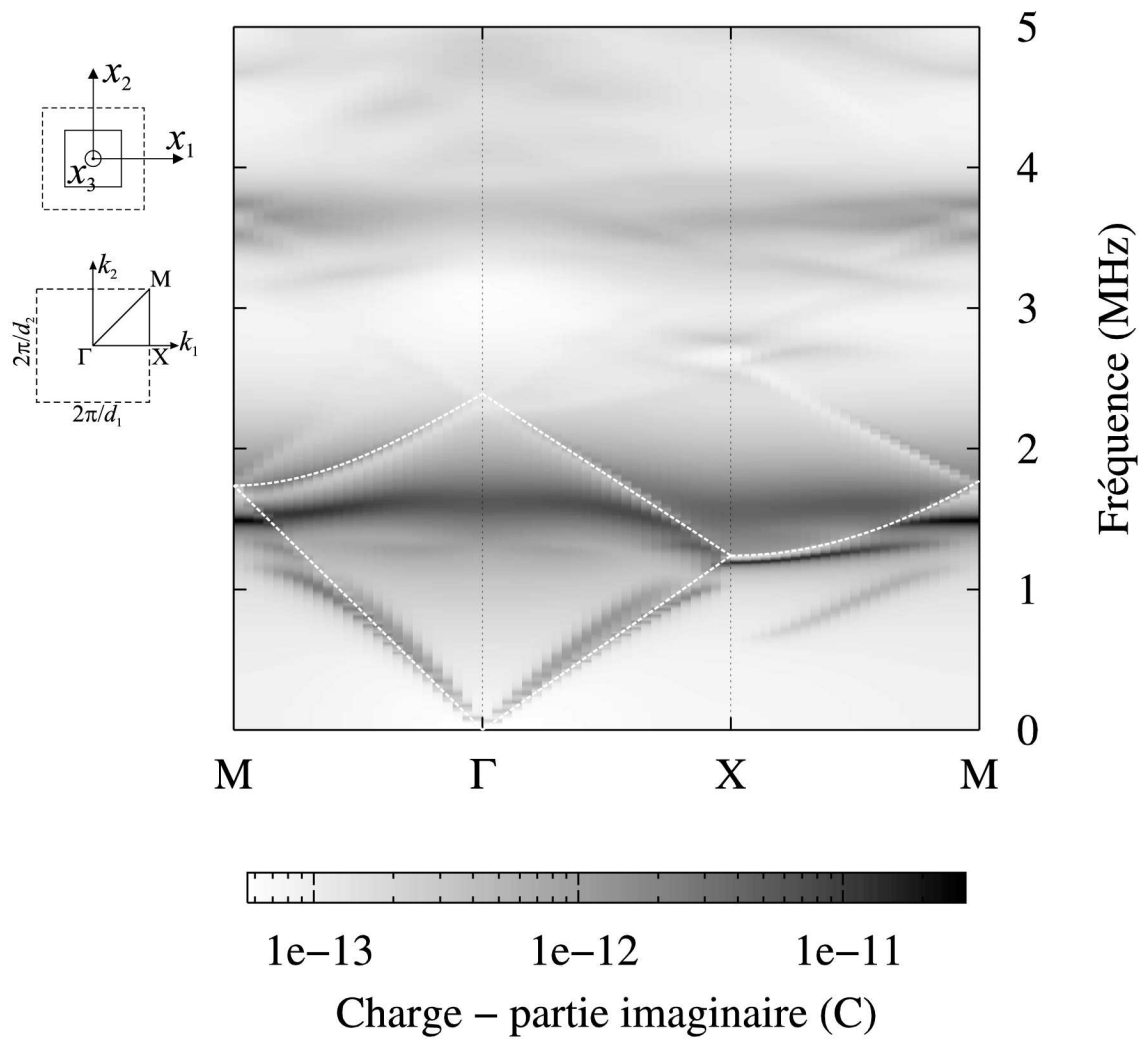


FIG. 7.25 – Partie imaginaire de la charge sommée sur une cellule, aussi égale au rapport de la conductance sur la fréquence angulaire. Cette représentation donne une image de la dispersion modale. Les lignes en pointillés blancs indiquent les premières contributions de l'onde de Stoneley–Scholte.

quables au sens premier du terme. En effet, se superposent aux modes connus des modes dont les courbes de dispersion ressemblent à celles d'une onde de volume se propageant dans un matériau homogène [31]. On trace sur la figure 7.26 l'admittance pour $\gamma_1 = 0,25$ et $\gamma_2 = 0$, autrement dit deux rangées de cellules voisines sont excitées en quadrature de phase.

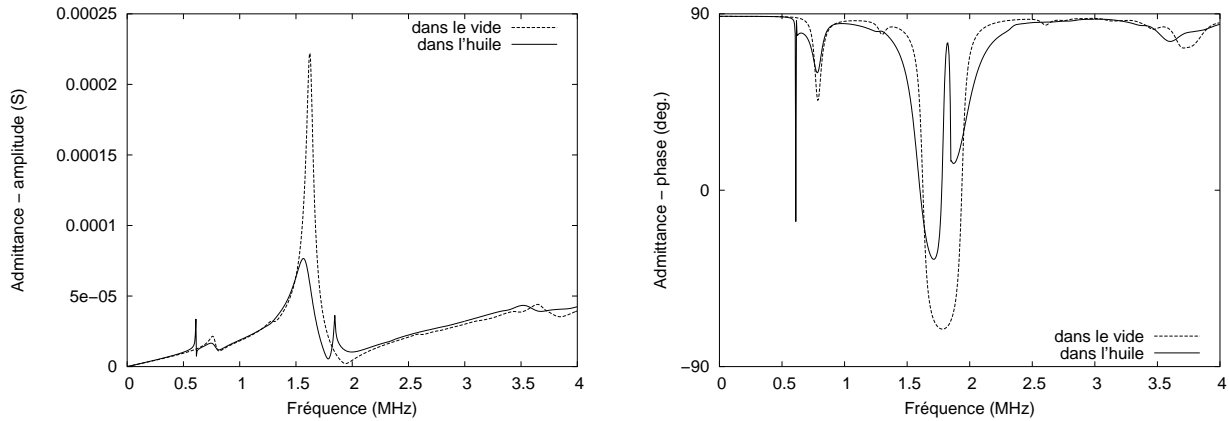


FIG. 7.26 – Admittances harmoniques comparées du composite vibrant dans le vide et en immersion dans l'huile, pour une excitation en quadrature de phase entre deux rangées voisines ($\gamma_1 = 0,25$ et $\gamma_2 = 0$).

La première contribution en question apparaît autour de 615 kHz. Sa vitesse de phase (à l'anti-résonance) est de l'ordre de 1476 m.s^{-1} , vitesse légèrement inférieure à celle de l'onde de volume dans l'huile fixée à 1480 m.s^{-1} . On attribue cette résonance à une onde d'interface, encore appelée onde de Stoneley–Scholte, qui se propage à l'interface entre le composite et l'huile [77]. Cette onde, très peu dispersive, se propage presque sans pertes pour ce qui concerne la première branche. Le repliement, autour de 1,85 MHz pour une vitesse effective toujours de l'ordre de 1476 m.s^{-1} , fait apparaître plus de pertes liées au rayonnement du transducteur dans l'huile. De plus, cette onde est principalement localisée dans le fluide (homogène), ce qui explique sa nature peu, voire non, dispersive.

Enfin la figure 7.27 montre les champs de déplacements de la structure, associés à la propagation de l'onde d'interface, pour $\gamma_1 = 0,25$ et $\gamma_2 = 0$, pour la première branche et son premier repliement. Dans le premier cas, la longueur d'onde dans le fluide vaut $4d$, soit quatre fois la période, dans le second, elle vaut $\frac{4}{3}d$. Alors que les deux déformées présentent les caractères spécifiques des modes S_0 et S_2 respectivement, la résine présente en plus à la surface des ondulations similaires à une polarisation elliptique et dont la longueur d'onde est celle de l'onde se propageant à l'interface dans le fluide.

Admittances mutuelles On calcule maintenant les admittances mutuelles comme précédemment. Les figures 7.28 et 7.29 comparent le résultat des calculs avec les mesures. Mis à part dans une plage de fréquences comprises entre 1,6 MHz et 2 MHz, la comparaison est satisfaisante, les niveaux de diaphonie sont toujours correctement prévus si on tient compte d'un pallier de bruit pour la mesure de la transmission entre cellules relativement éloignées.

Les mesures font apparaître de brusques variations dans la gamme de fréquence précitée. La hauteur d'huile dans le bain s'est trouvée limitée par la longueur des pointes de touche, puisqu'on voulait éviter de plonger les bras de suspension des pointes. Dans la plage de résonance du mode d'épaisseur, les ondes émises dans l'huile se réfléchissent à l'interface huile-air, puis en partie de nouveau à l'interface huile-composite. Pour les longueurs d'ondes où les ondes interfèrent constructivement, l'épaisseur d'huile entre le composite et l'air entre en résonance. A l'inverse, elles peuvent interférer de façon destructive et empêcher

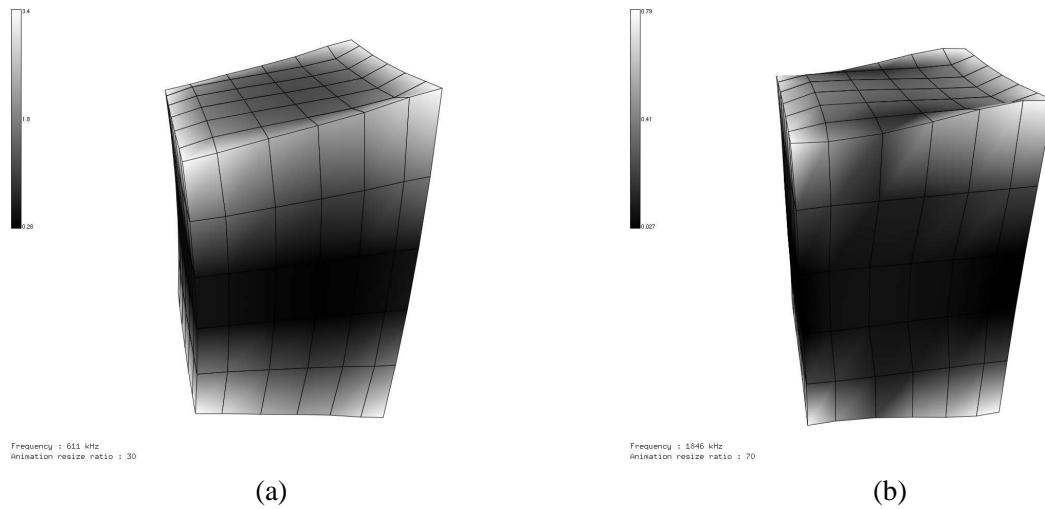


FIG. 7.27 – Champs de déplacements pour $\gamma_1 = 0,25$ et $\gamma_2 = 0$ à 611 kHz et 1846 kHz respectivement. L'échelle de gris représente l'amplitude du déplacement suivant l'axe vertical. On distingue nettement sur (b) la polarisation elliptique de la résine à la surface.

toute vibration. A cela s'ajoute la réflexion des ondes rayonnées sur le fond du bac.

Le rôle des différentes contributions aux admittances mutuelles est plus compliqué à établir du fait de la présence des modes guidés à l'interface dans le fluide et du couplage de celui-ci avec les autres modes lorsqu'ils se croisent.

D'une part, les résultats de mesure, bien que satisfaisants, montrent qu'il reste encore à améliorer les conditions expérimentales pour éviter les problèmes de réflexion. D'autre part, avec une connaissance suffisante des conditions expérimentales, on peut imaginer prendre en compte l'empilement de matériaux, résultant des conditions de mesures, grâce aux conditions de rayonnement que l'on impose dans notre méthode. Cela signifie connaître les épaisseurs exactes de chaque couche ainsi que leurs propriétés mécaniques, notamment les pertes acoustiques.

7.2.2 Nature des modes se propageant dans un composite 1-3

Si le calcul d'admittance fournit une "carte" de dispersion des vibrations de la structure, il n'est pas toujours évident de donner la nature précise d'une vibration donnée.

Afin de mieux identifier les modes susceptibles de se propager dans un composite, en priorité les modes couplés, on utilise la méthode de développement en ondes planes et plus spécifiquement la propagation hors-plan décrite en page 89.

A part quand ce sera précisé, les calculs sont effectués en prenant 16×16 termes dans les séries de Fourier et de Bloch-Floquet décrivant respectivement le composite et les champs s'y propageant.

La période du composite est arbitrairement fixée à $100 \mu\text{m}$ pour une largeur des barreaux de PZT de $70 \mu\text{m}$. Le paramètre important pour ce type d'analyse est en fait la fraction volumique de PZT, ici égale à 0,49. Le PZT est du P1-88 de Quartz et Silice en usage à Framatome-ANP au début de ces travaux et la matrice est constituée de résine époxy.

Evolution des courbes de dispersion en fonction de la composante normale de k

On reporte sur la figure 7.30 les courbes de dispersion pour plusieurs valeurs de la composante normale k_3 du vecteur d'onde. On définit le vecteur d'onde normalisé γ_3 , suivant l'axe vertical x_3 , par $\gamma_3 = k_3 d_1 / 2\pi$.

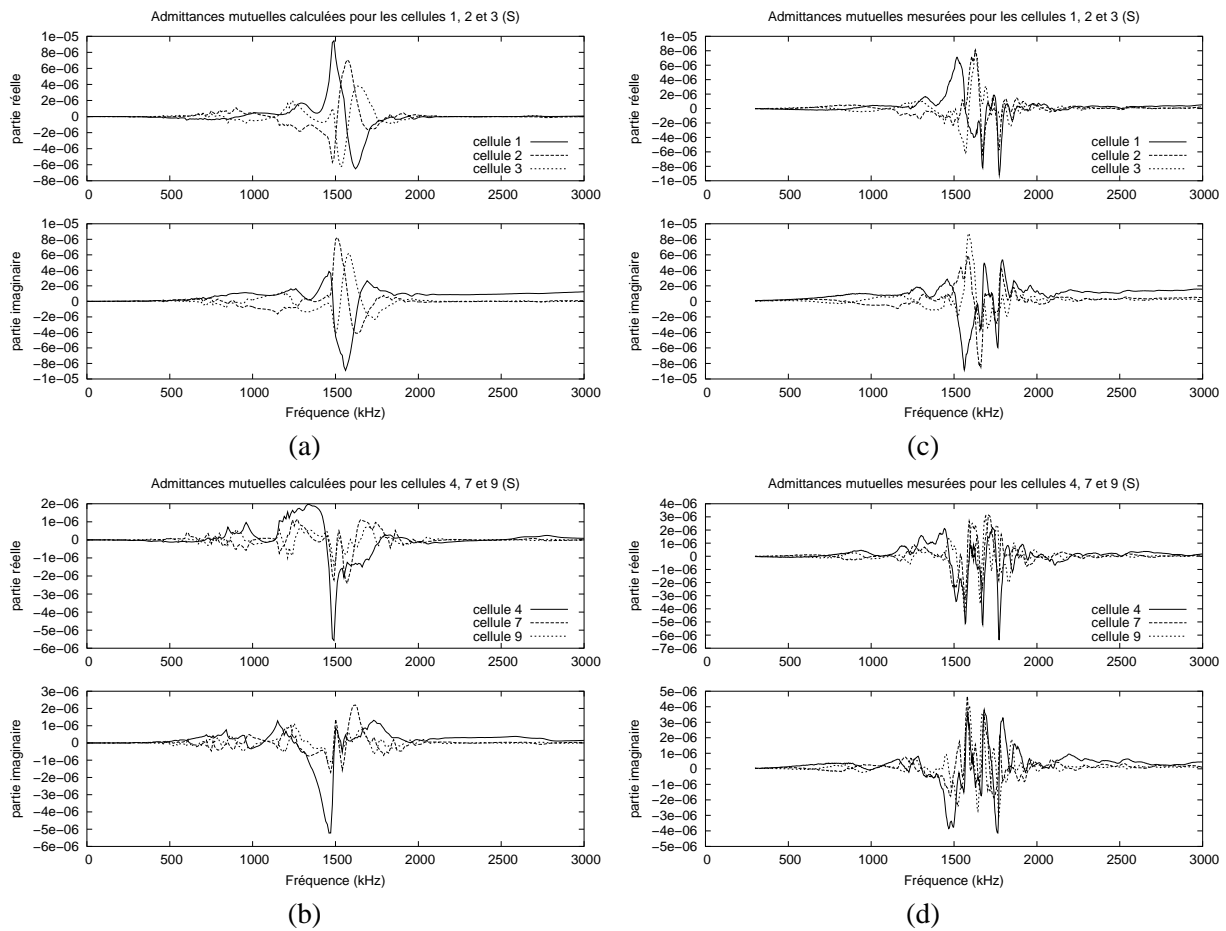
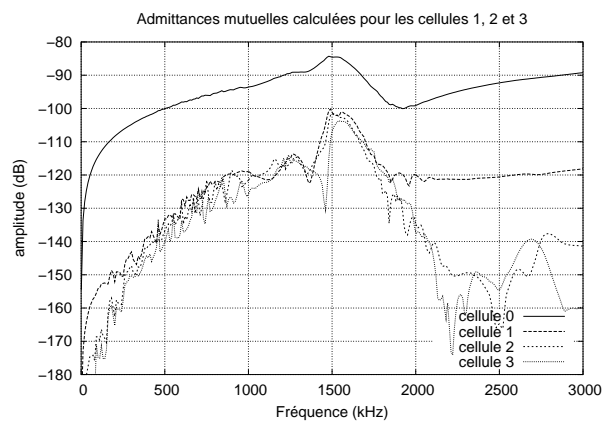
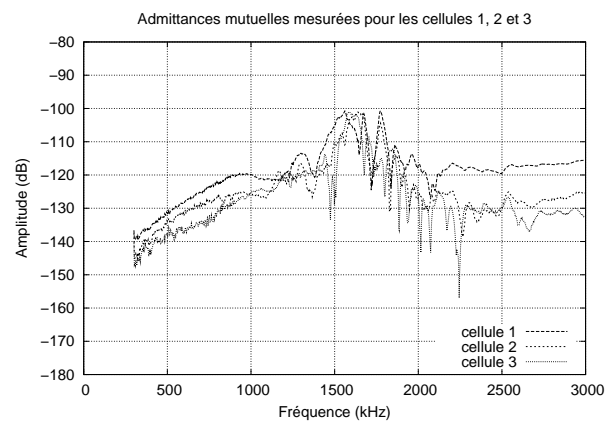


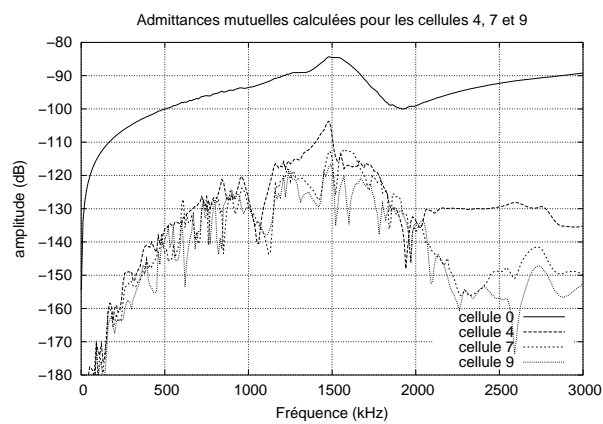
FIG. 7.28 – Admittances mutuelles, en immersion dans l'huile, pour les cellules (a)-(c) 1,2 et 3, et (b)-(d) 4, 7 et 9, respectivement calculées par transformée de Fourier de l'admittance harmonique et mesurées avec le dispositif expérimental présenté plus haut.



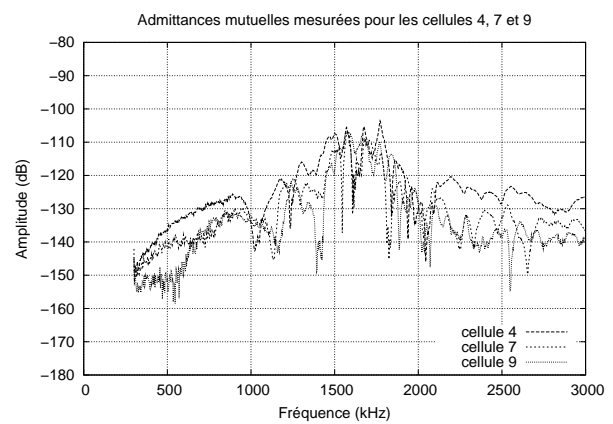
(a)



(c)



(b)



(d)

FIG. 7.29 – Admittances mutuelles calculées et mesurées et auto-admittance (admittance mutuelle de la cellule excitée).

On reconnaît sur la figure 7.30(a) les courbes de dispersion classiques lorsque les ondes se propagent dans le plan du réseau. Sur le chemin $\Gamma - X$ (propagation suivant x_1), les premières branches sont respectivement le mode transverse horizontal TH (polarisation suivant x_2), le mode transverse vertical TV (polarisé suivant x_3) et le mode longitudinal L (polarisé suivant x_1). La quatrième branche s'apparente à un mode de torsion (T) pour lequel le barreau de PZT effectue une rotation autour de son axe. Enfin les courbes de dispersion font apparaître plusieurs bandes d'arrêt dites absolues, dans la mesure où elles existent quelle que soit la nature (la polarisation) des modes.

Remarquons de plus qu'aux points Γ , X et M de la bordure de la première zone de Brillouin, la vitesse de groupe planaire ($\partial\omega/\partial k_{\parallel}$) s'annule quels que soient les modes si la fréquence n'est pas nulle. On se trouve alors en régime d'ondes stationnaires. Rappelons qu'au point Γ , les paramètres d'excitation γ_1 et γ_2 sont nuls – toutes les cellules vibrent en phase – et au point X , γ_1 vaut 0 et γ_2 vaut 0,5 – deux rangées voisines sont en opposition de phase. Enfin, au point M , γ_1 et γ_2 valent 0,5, autrement dit on a une alternance de phase dans les deux directions comme si les cases noires d'un échiquier (infini !) vibraient en opposition de phase des cases blanches.

Lorsque la valeur de k_3 augmente, il n'est plus aussi simple de définir la polarisation des modes. L'angle entre la direction de propagation et le plan du réseau dépend étroitement de la valeur de k_3 par rapport à la valeur de $|k_{\parallel}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. On ne peut plus parler de modes purs – dans le sens où la polarisation est rigoureusement longitudinale ou transverse – mais on parle de modes *quasi-longitudinaux* ou *quasi-transverses* [3]. Les figures 7.30(b) à 7.30(f) montrent l'évolution des branches entre $\gamma_3 = 0$, 1 et $\gamma_3 = 0$, 2. La polarisation n'est pas rigoureusement définie. Aux points de haute symétrie X et M , des branches se croisent et se séparent après s'être "échangées". Deux de ces points de croisement en X sont indiqués sur les figures 7.30(c)-(d). Les trois branches impliquées, sur le chemin $\Gamma - X - M$, sont numérotées de 1 à 3. On suivra leurs évolutions pour se rendre compte de ces interversions. Pour $\gamma_3 = 0,4$ (figure 7.30(g)), les premières branches sont distinctes. Les deux premières branches sont deux modes quasi-transverses suivant x_2 (mode F2) et x_1 (mode F1) respectivement pour le chemin $\Gamma - X$, qui s'apparentent à des modes de flexion des barreaux. La troisième branche (T) s'apparente au mode de torsion des barreaux. Enfin la quatrième branche (L) est le mode quasi-longitudinal.

Diagrammes de dispersion hors-plan

On trace maintenant le produit fréquence-période $f d_1$ en fonction de la composante normale du vecteur d'onde, normalisée par la période, $\gamma_3 = k_3 d_1/2\pi$. Cela revient à calculer comme précédemment les courbes de dispersion pour tout k_3 et à condenser le chemin $\Gamma - X - M - \Gamma$ (l'axe des abscisses) en un seul point. Cela revient aussi à tracer un graphe suivant trois axes avec : le vecteur d'onde normalisé dans le plan du réseau $|k_{\parallel}| d_1/2\pi$, la composante normale normalisée γ_3 et le produit fréquence-période $f d_1$. On tourne ensuite les axes de telle façon que $f d_1$ et γ_3 soient dans le plan de la page.

Représenté de cette façon, le diagramme ne permet pas de suivre les modes, mais il fournit la position des bandes d'arrêt de la structure, c'est-à-dire qu'il indique l'existence ou la non-existence de modes acoustiques pour tout couple (f, k_3) . Dans ce plan de visualisation, on ne peut plus parler de bandes d'arrêt absolues si on prend en compte la propagation suivant x_3 . Toutefois, par abus de langage, nous continuerons de parler de bandes d'arrêt pour dénommer ces régions où aucune onde acoustique ne se propage. Le résultat est reporté sur la figure 7.31.

Dans le cas de ce diagramme, les calculs ont été réalisés avec 10×10 termes dans les séries de Fourier et Bloch-Floquet afin de conserver un temps de calcul raisonnable.

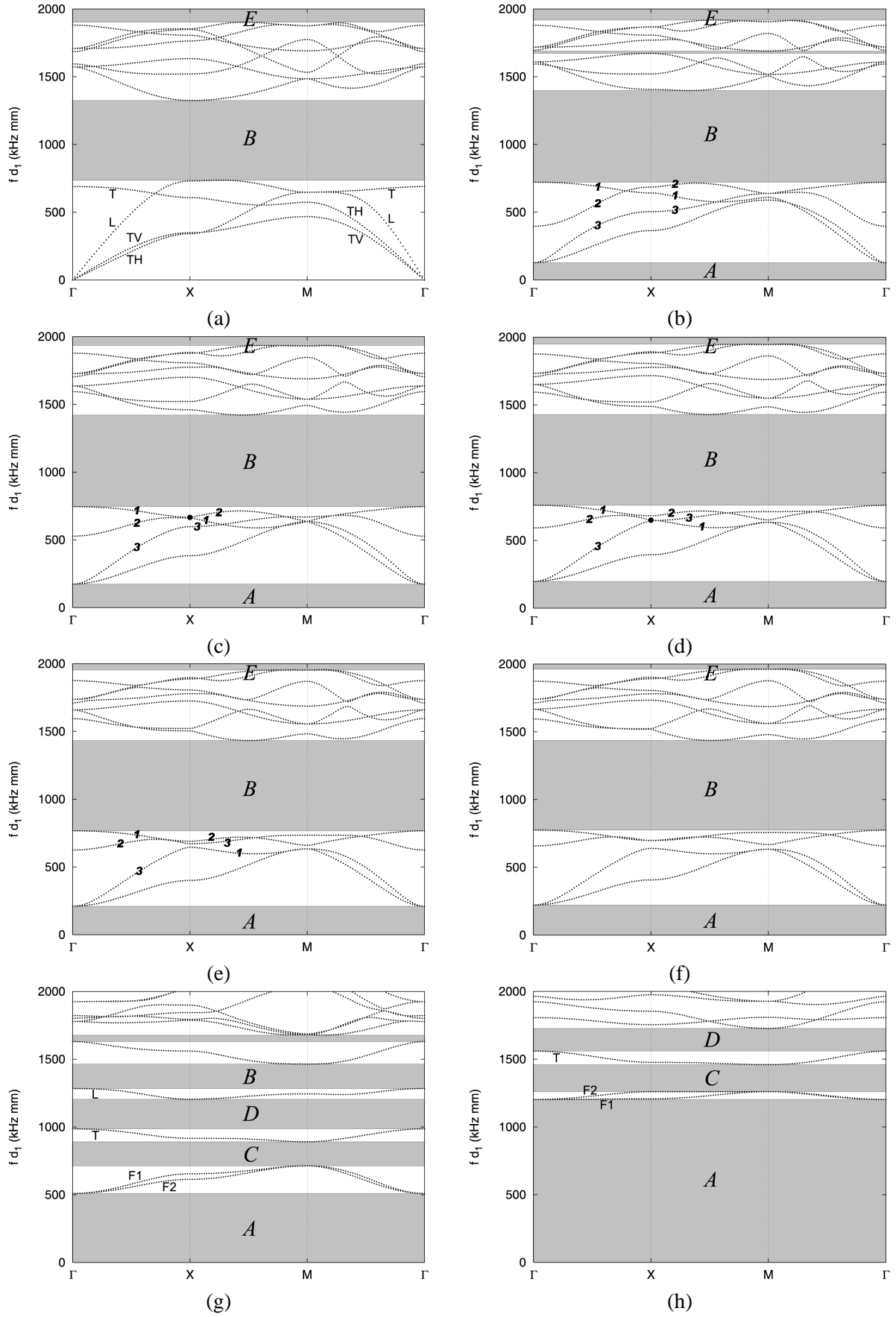


FIG. 7.30 – Diagrammes de dispersion pour différentes valeurs de γ_3 : (a) 0, (b) 0,12, (c) 0,16, (d) 0,18, (e) 0,19, (f) 0,2, (g) 0,4 et (h) 0,8. Les zones grises indiquent les bandes d'arrêt.

Enfin, on reporte aussi sur le diagramme la branche du mode transverse de la résine pour $k_1 = k_2 = 0$ ainsi que la position du mode longitudinal. On situe de même le mode longitudinal du PZT se propageant suivant x_3 . On utilise finalement le modèle de Smith et Auld [21] pour déterminer la vitesse du mode longitudinal du composite suivant l'axe x_3 , sous réserve que les hypothèses du modèle soient vérifiées.

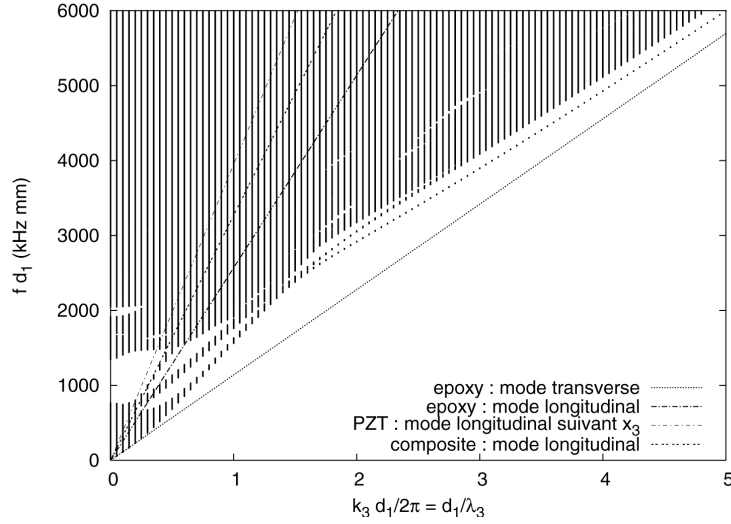


FIG. 7.31 – Diagramme de dispersion hors-plan. Les régions blanches correspondent à des couples fréquence- k_3 pour lesquels aucune onde ne se propage.

On distingue grossièrement deux régions. Pour γ_3 supérieur à 1,4, on remarque la présence de bandes d'arrêt séparées par des branches qui tendent asymptotiquement vers l'onde de volume transverse de la résine.

La région qui nous intéresse principalement dans le cas des composites utilisés comme transducteurs ultrasonores est celle où γ_3 est inférieur à 1,4, dont on reporte le tracé sur la figure 7.32. C'est dans cette région que l'on trouve le mode de compression suivant la normale x_3 au plan du réseau. Cette restriction prend tout son sens dans ce qui suit.

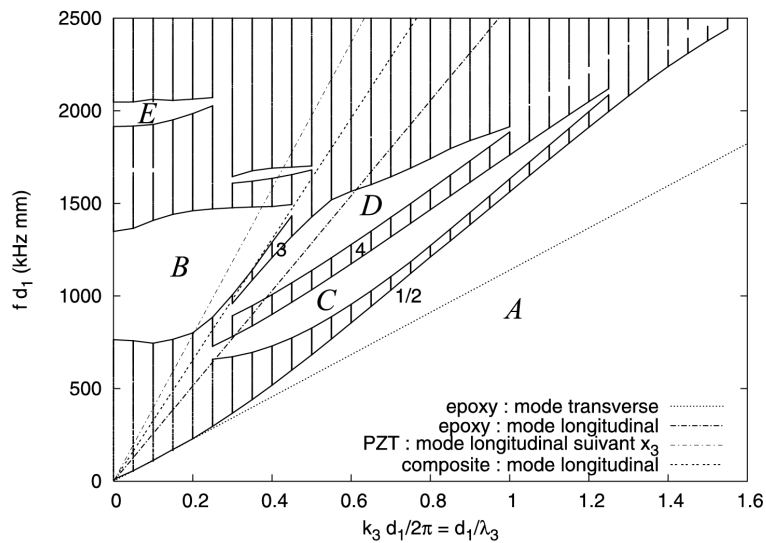


FIG. 7.32 – Agrandissement de la figure 7.31.

On retrouve dans cette région les bandes d'arrêt absolues évoquées dans la section précédente en considérant les courbes de dispersion "classiques" (figure 7.30) pour plusieurs valeurs de γ_3 . Les bandes d'arrêt

d'importance sont identifiées par des lettres de *A* à *E*. La bande d'arrêt *A* comprend la zone dans laquelle la vitesse est inférieure à celle du mode transverse dans la résine et dans laquelle, intrinsèquement, aucune onde ne peut se propager. La nature composite du matériau fait que la bande d'arrêt *A* s'étend au-delà de la limite imposée par le mode transverse de la résine, mode dont la vitesse représente la vitesse minimale des modes se propageant dans la résine d'une part et dans la céramique d'autre part.

La bande d'arrêt *B*, dont la présence est classiquement constatée dans le cas d'un composite lorsque l'on considère les modes se propageant dans le plan du réseau ($\gamma_3 = 0$), change de taille lorsque γ_3 augmente et finit par complètement disparaître autour de γ_3 égal à 0,5. Dans le même temps, deux autres bandes d'arrêt, identifiées par *C* et *D*, apparaissent pour γ_3 autour de 0,25. Ces bandes d'arrêt disparaissent à leur tour lorsque γ_3 augmente.

Si on reprend le suivi des branches de la section précédente, on constate que les trois bandes d'arrêt *B*, *C* et *D* sont séparées par les branches 3 (mode L) et 4 (mode T), comme indiqué sur la figure 7.32. On peut alors réinterpréter la figure dans le sens où les trois bandes d'arrêt précitées n'en forment qu'une seule, traversée par les modes 3 et 4. La branche 4 correspond à un mode de torsion des barreaux.

Pour les valeurs de γ_3 coïncident avec cette bande d'arrêt, le mode 3 correspond au mode longitudinal. De plus, le mode de compression longitudinal du composite suivant l'axe x_3 , dont on a calculé la vitesse avec le modèle de Smith et Auld [21], se situe à la limite supérieure de la branche 3. Sur les courbes de dispersion de la figure 7.30(g), la limite supérieure de la branche 3 est atteinte pour γ_1 et γ_2 nuls, ce qui correspond au cas de figure du modèle évoqué (excitation synchrone). En première approximation, ce type de représentation permet de déterminer la gamme de longueurs d'onde pour laquelle le mode quasi-longitudinal est situé dans une bande d'arrêt. Elle nous donne par ailleurs la gamme de fréquences correspondante. La vitesse donnée par le modèle de Smith et Auld est la vitesse de phase v_l de l'onde longitudinale suivant l'axe x_3 , reliée à la fréquence d'antirésonance f_a du mode d'épaisseur du composite d'épaisseur h par $v_l = 2hf_a$.

A partir du diagramme de dispersion hors-plan, on peut imaginer fixer un point de fonctionnement du composite pour lequel le mode longitudinal se situe dans la bande d'arrêt. On détermine la longueur d'onde correspondante puis l'épaisseur liée à cette longueur d'onde (moitié de la longueur d'onde).

Modes potentiellement couplés

On s'attarde plus précisément sur les modes potentiellement couplés par la structure en tenant compte du type d'excitation. "potentiellement couplés" signifie que l'on regarde la pertinence de la forme de la vibration par rapport à la symétrie de la structure et aux conditions d'excitation. On ne dit pas ici si telle ou telle vibration est couplée du point de vue piézoélectrique.

La figure 7.33 donne les diagrammes de dispersion hors-plan pour différentes valeurs de γ_1 sur le chemin $\Gamma - X$ (propagation suivant x_1). On ne parcourt plus le triangle ΓXM , mais on se place à un point précis du contour.

Les études précédentes des modes latéraux par une méthode de développement en ondes planes ou par une méthode de différences finies supposaient une propagation des ondes dans le plan du composite [28]. Hors, comme pour le mode d'épaisseur, la longueur d'onde des modes latéraux vaut deux fois l'épaisseur. De plus, comme on l'a vu précédemment (voir figure 7.15), il est possible d'exciter les harmoniques impaires des modes latéraux. Supposons maintenant que l'on se donne un point de fonctionnement dans la bande d'arrêt, soit $\gamma_3 = 0,4$. Cette valeur correspond à une épaisseur h de 125 μm , pour une période de 100 μm . Le rapport largeur/hauteur du PZT est alors de $70/125 = 0,56$, rapport généralement considéré comme très limite.

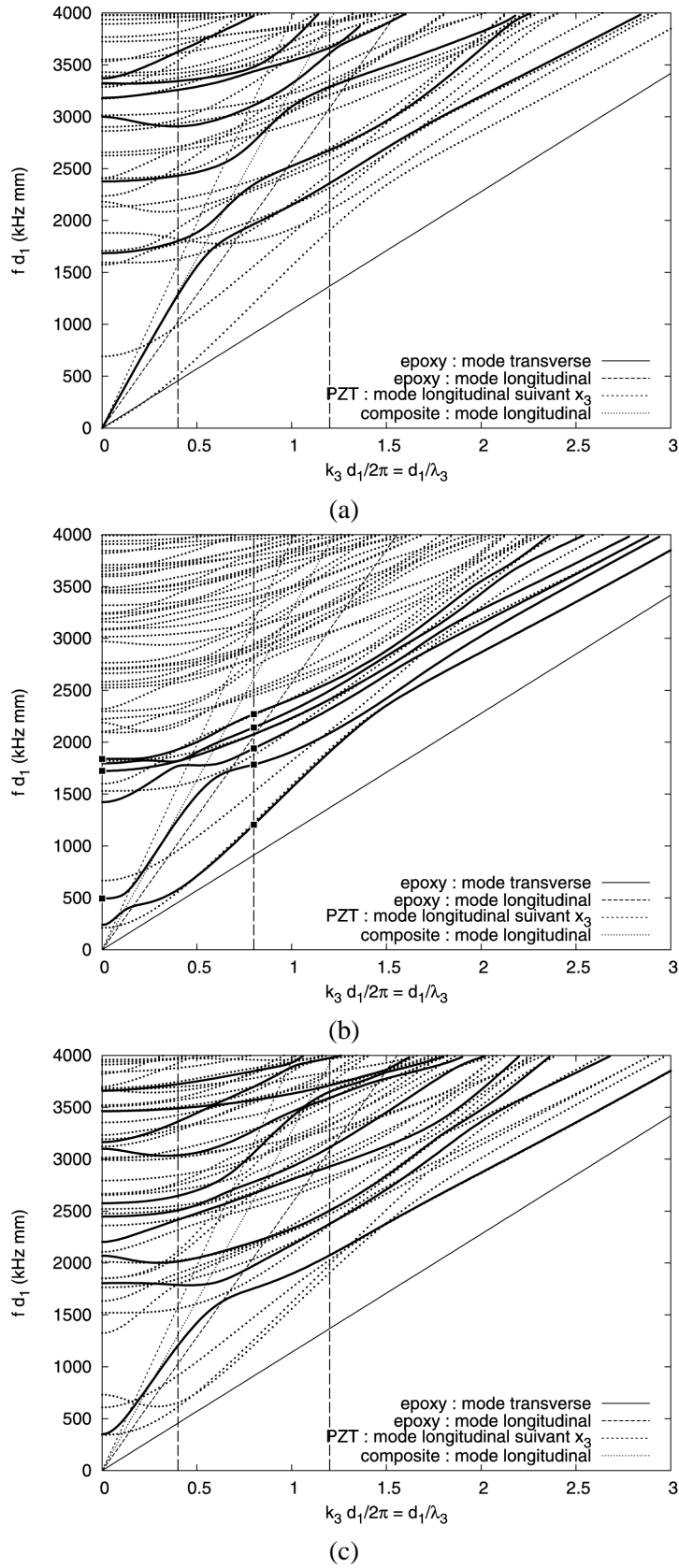


FIG. 7.33 – Diagrammes de dispersion hors-plan pour différents points du chemin Γ - X : (a) point Γ , (b) $\gamma_1 = 0,25$ et (c) point X . Les lignes continues représentent les modes potentiellement couplés pour (a) et (c). Sur la figure (b), les carrés indiquent les modes potentiellement couplés pour γ_3 égal à 0 et 0,8, et les lignes continuent sont leurs branches respectives.

La figure 7.33(a) correspond au cas classique d'une excitation synchrone, pour lequel les modes latéraux ont été étudiés. Les modes potentiellement couplés sont tracés en lignes épaisses. Ils ont été déterminés en regardant la forme du champ de déplacements pour chaque mode. Pour γ_3 inférieur à 0,5, la première branche est le mode longitudinal, tandis que les autres branches correspondent aux modes latéraux. Si on considère les deux premières branches, on constate que le mode longitudinal et le premier mode latéral se rapprochent. Autour de $\gamma_3 = 0,6$, les deux branches s'infléchissent mais ne se croisent pas. Au-delà, la première branche devient celle du premier mode latéral. En toute rigueur, le premier mode latéral subit le même traitement et sa branche devient celle du mode longitudinal. Toutefois, la présence des autres modes latéraux et la répétition du même phénomène successivement entre les modes interdisent la réapparition du mode longitudinal. On notera que ce diagramme donne la gamme de validité du modèle de Smith et Auld et la condition d'existence du mode longitudinal pur. Il explique aussi pourquoi l'on ne peut identifier clairement la contribution de l'harmonique trois du mode longitudinal. Parallèlement au rapport largeur/hauteur limite, la valeur de γ_3 choisie est à la limite de la partie linéaire de la courbe du mode longitudinal. Au-delà, sa courbe s'incurve et le mode longitudinal commence à se coupler avec le premier mode latéral.

La fréquence du premier mode latéral à $\gamma_3 = 0,4$ n'est pas très éloignée de celle du même mode à $\gamma_3 = 0$. Si $\lambda_3^{(3)}$ est la longueur d'onde de l'harmonique de rang trois du premier mode latéral, alors $d_1/\lambda_3^{(3)} = 3d_1/\lambda_3 = 1,2$, et l'intersection de $\gamma_3 = 1,2$ avec les modes latéraux donnent les fréquences respectives de leurs harmoniques de rang trois. Pour le premier mode latéral, le produit $f d_1$ est de l'ordre de 2400 Hz.m contre 1800 Hz.m pour le fondamental. Il s'ensuit, au-delà du premier mode latéral, la superposition des modes latéraux d'ordre plus élevé et de leurs harmoniques. La figure 7.34 donne le champ de déplacements u_3 du mode longitudinal et des premiers modes latéraux successifs à $\gamma_3 = 0,4$.

Dans la section précédente, le calcul de l'admittance harmonique a montré la présence de modes couplés au point X ($\gamma_1 = 0,5$, $\gamma_2 = 0$) notamment. Le diagramme de dispersion hors-plan est tracé en ce point sur la figure 7.33(c). Les branches en lignes continues sont les modes potentiellement couplés pour $\gamma_3 = 0,4$. Les champs de déplacements u_3 de ces modes sont reportés sur la figure 7.35.

Enfin, dans un composite d'épaisseur finie, l'application d'un déphasage entre cellules permet la propagation de modes tels que les modes de Lamb S_0 ou encore S_2 dont les longueurs d'onde le long de l'axe vertical valent respectivement l'infini ($k_3 = 0$) et l'épaisseur. Pour l'épaisseur correspondant au point de fonctionnement choisi, cela signifie que γ_3 vaut 0 et 0,8 respectivement. On prend par exemple $\gamma_1 = 0,25$ et $\gamma_2 = 0$ pour lesquels des modes de Lamb se propagent dans le cas d'une plaque. Le diagramme hors-plan est reporté sur la figure 7.33(b). Pour γ_3 égal à 0 et 0,8, on indique les premiers modes potentiellement couplés et leurs branches respectives. On trace sur la figure 7.36 les champs de déplacements des premiers modes pour chacune des deux valeurs de γ_3 . Pour $\gamma_3 = 0$ (figures 7.36(a)-(c)), les deuxième et troisième modes présentent une longueur d'onde suivant x_2 égale à la période ($k_2 = 2\pi/d_2$), contrairement au premier cas de figure où k_2 est nul. Les ondes de volume, desquels résultent les modes de Lamb S_0 et S_2 , sont le premier mode pour chacune des deux valeurs de γ_3 respectivement. Les autres modes se situent à des fréquences supérieures à celle du mode d'épaisseur.

Ainsi qu'on l'a dit en préambule à la méthode de calcul des diagrammes de dispersion pour une propagation hors-plan, les modes de plaque résultent des réflexions multiples des ondes de volume sur les interfaces de la plaque et de leurs interférences constructives. On a montré ici qu'on peut déterminer ces ondes de volume et déterminer "l'environnement modal" du mode d'épaisseur. Bien que cette méthode ne tienne pas compte des conditions aux limites mécaniques et électriques aux surfaces d'une plaque, elle reste pertinente tant que l'on reste dans la partie linéaire de la courbe du mode longitudinal, autrement dit pour des barreaux

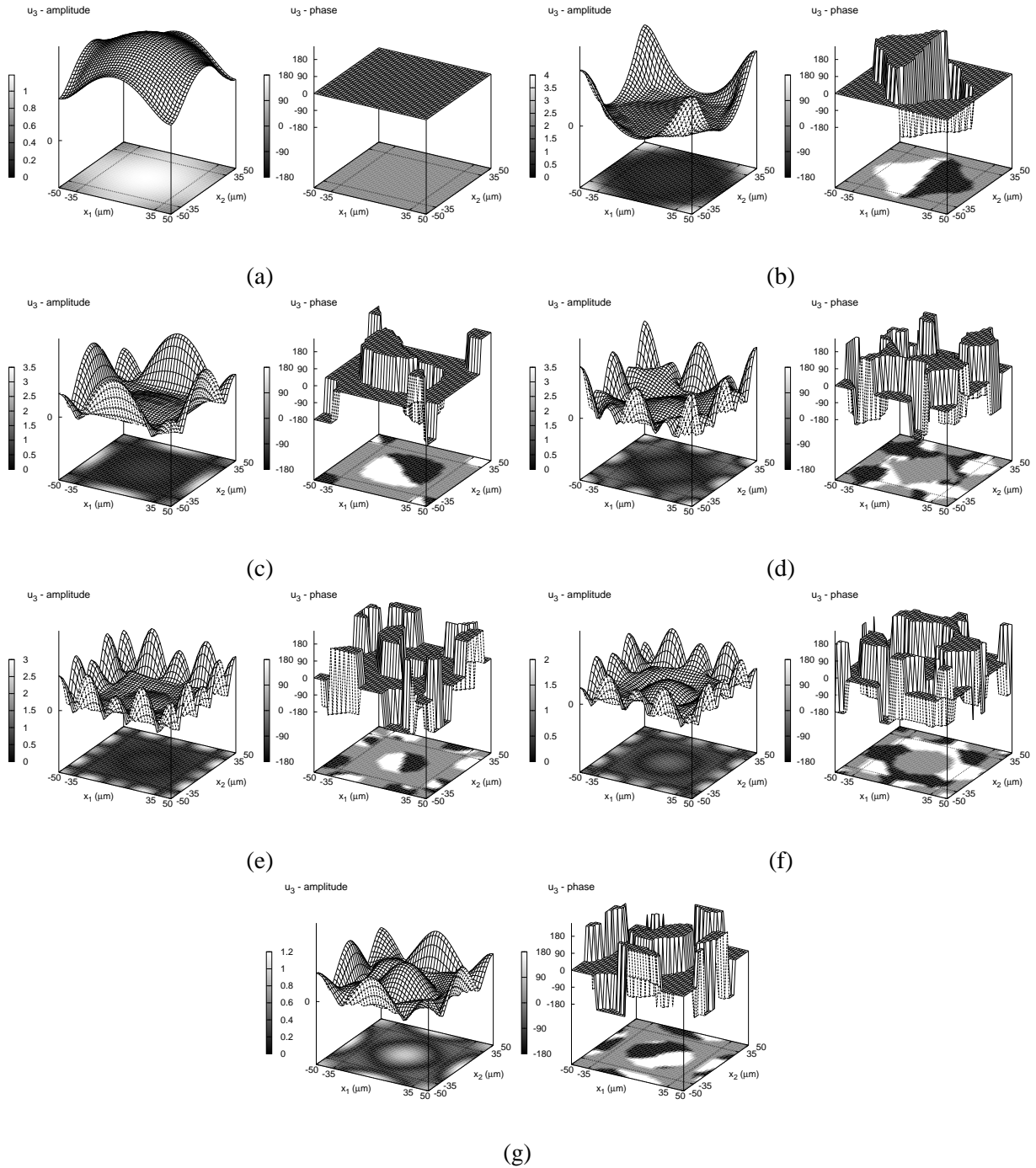


FIG. 7.34 – Amplitude et phase du déplacement normal u_3 sur une cellule élémentaire lorsque le réseau vibre de façon synchrone ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) avec une propagation suivant x_3 telle que $\gamma_3 = 0, 4$. Ces modes sont ceux potentiellement couplés identifiés sur la figure 7.33(a), par fréquence croissante. Le mode (a) est le mode longitudinal tandis que les modes (b) et (c) sont les premier et second modes latéraux respectivement.

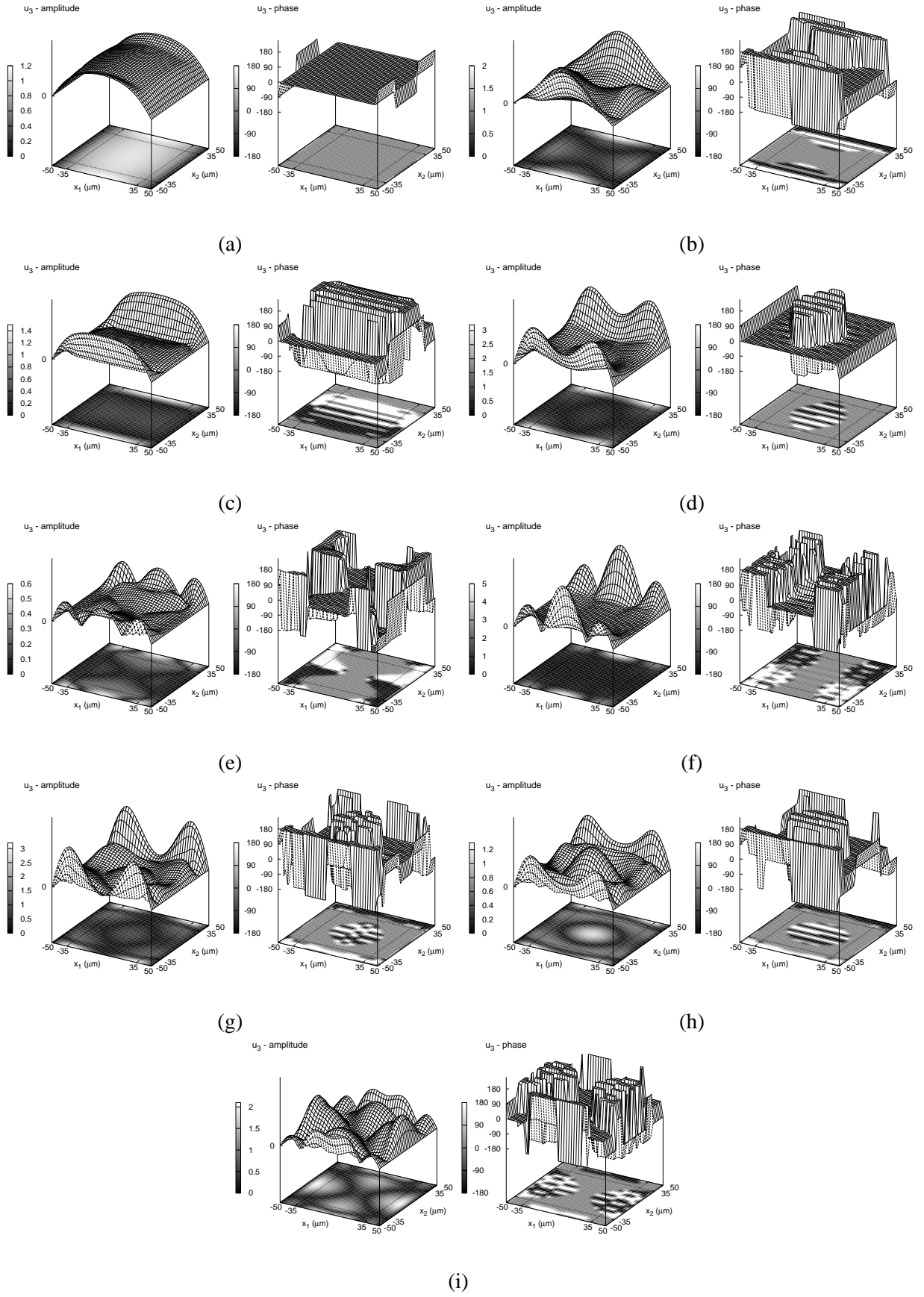


FIG. 7.35 – Déplacement normal u_3 au point X de la première zone de Brillouin ($\gamma_1 = 0,5$ et $\gamma_2 = 0$) avec $\gamma_3 = 0,4$, pour les modes potentiellement couplés, identifiés sur la figure 7.33(c).

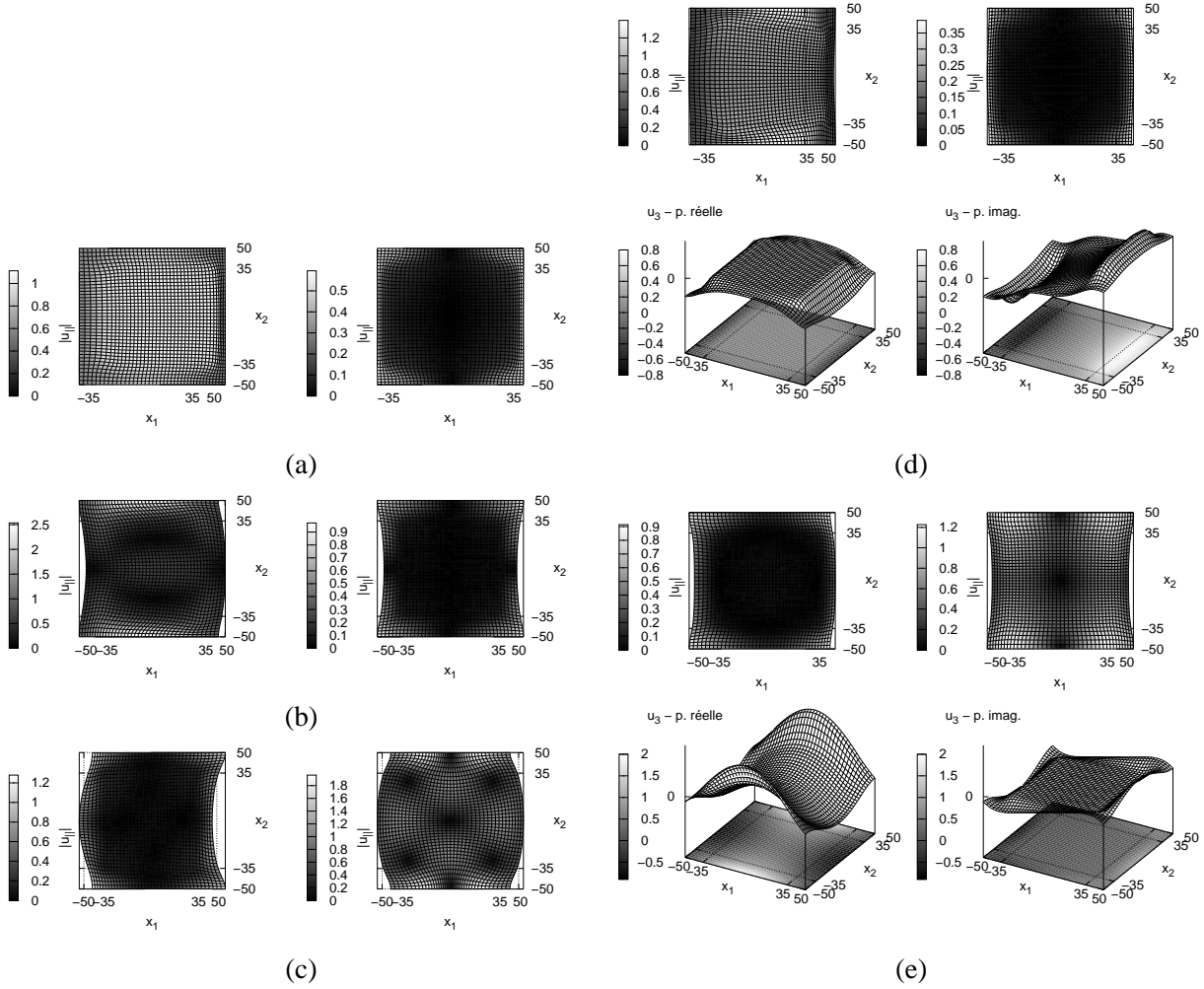


FIG. 7.36 – (a), (b) et (c) champ de déplacements u_{\parallel} coplanaire des modes potentiellement couplés pour γ_3 nul (propagation dans le plan) au milieu du chemin $\Gamma - X$ ($\gamma_1 = 0, 25$ et $\gamma_2 = 0$). Dans ces conditions, deux cellules voisines vibrent en quadrature de phase et les parties réelle et imaginaire du déplacement donnent le déplacement de deux cellules voisines à un temps donné. Le mode (a) est le mode longitudinal suivant x_1 , à l'origine du mode S_0 . (d) et (e) Parties réelle et imaginaire des champs de déplacements coplanaire et normal des modes potentiellement couplés, pour $\gamma_3 = 0, 8$ au milieu du chemin $\Gamma - X$. L'onde de volume (d) est à l'origine du mode S_2 . Tous les modes de cette figure sont repérés par des carrés sur la figure 7.33 et sont représentés par fréquence croissante.

”élancés”. Elle reste un premier outil de compréhension et de conception des composites, notamment pour l’étude de cellules élémentaires plus complexes, complétée ensuite par une étude fine du transducteur réel par exemple avec la méthode des éléments finis.

Une utilisation des bandes d’arrêt

On a montré dans la section 6.2.2 comment décrire une cellule ”complexe”, c’est-à-dire contenant plusieurs inclusions de différentes natures. Par comparaison à une cellule simple bi-phasique, on appelle aussi ce genre de cellule *supercellule*. On s’intéresse ici à une structure tout à fait théorique dont la supercellule est bi-périodique et contient 3×3 inclusions de tungstène enrobées de résine époxy [78]. Ces deux matériaux ont été choisis pour le fort contraste de leurs propriétés mécaniques (rapport des impédances mécaniques autour de 35), résultant en l’existence de larges bandes d’arrêt. Dans un premier temps on s’intéresse à ce seul composite tungstène-époxy. On remplace ensuite le barreau central par un barreau d’AlN. La cellule est décrite sur la figure 7.37.

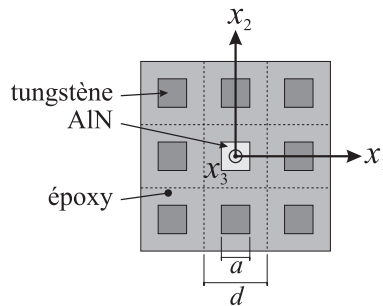


FIG. 7.37 – Description de la supercellule. Elle est constituée de 3×3 inclusions de tungstène de section carrée de largeur $a = 45 \mu\text{m}$ pour une période de $3d = 300 \mu\text{m}$. L’inclusion centrale est remplacée par un barreau d’AlN.

La figure 7.38(a) donne le diagramme de ”bandes” – on conservera cette appellation même si son usage est abusif dans le cas de la propagation hors-plan – du composite tungstène-époxy, calculé pour une cellule simple de ce composite. Les zones blanches (notées de (a) à (h)) révèlent plusieurs bandes d’arrêt relativement larges malgré la faible fraction volumique du tungstène (20%). A titre indicatif, le rapport de la largeur de la bande d’arrêt sur la fréquence centrale vaut 43% et 19% pour (b) et (c) respectivement, pour γ_3 nul.

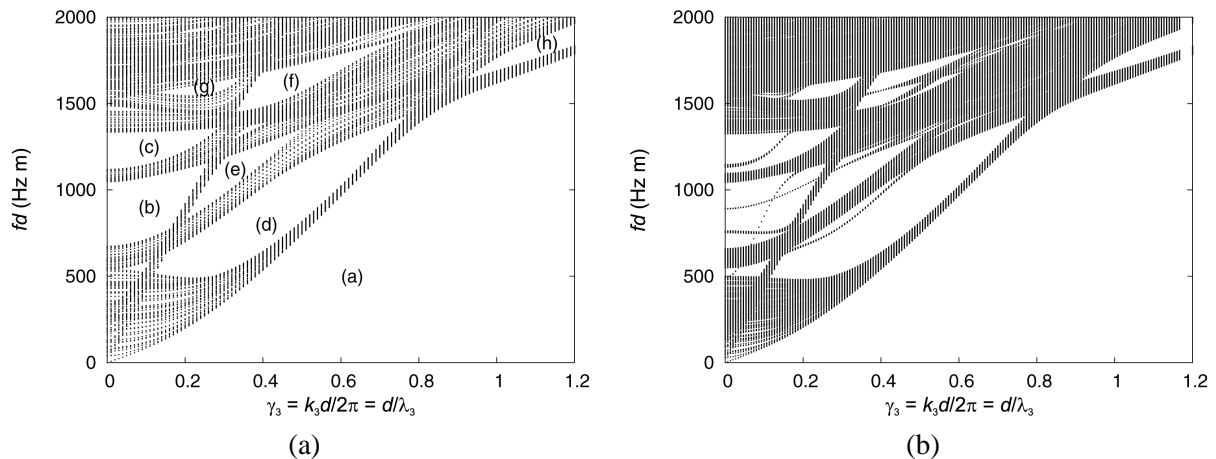


FIG. 7.38 – Diagrammes de ”bandes” hors-plan (a) du composite tungstène-époxy et (b) du composite tungstène-époxy-AlN dont la cellule est représentée sur la figure 7.37.

On considère ensuite la supercellule et on remplace le tungstène du barreau central par de l'AlN, dont l'impédance acoustique est 10 fois celle de la résine. Le nombre d'harmoniques des séries de Fourier et Bloch-Floquet, dans le cas simple, était de 6×6 . Dans le cas de la supercellule qui compte 3×3 cellules simples, le nombre d'harmoniques doit passer à 18×18 pour atteindre une convergence similaire. Le résultat est reporté sur la figure 7.38(b). On retrouve alors la même structure de bandes d'arrêt que dans le cas sans défaut, à ceci près que des branches isolées apparaissent dans les zones où aucune onde ne peut se propager dans le cas du seul composite tungstène-époxy.

Afin de mieux comprendre ce phénomène, on trace sur la figure 7.39(a) le diagramme de dispersions de la supercellule pour $\gamma_3 = 0, 1$. On distingue les quatres bandes d'arrêt. Les nombreux repliements des branches, en-dehors des bandes d'arrêt, sont dus au fait que la première zone de Brillouin ne se limite pas à une cellule simple mais s'étend à plusieurs cellules. L'ajout du défaut induit l'apparition de cinq modes dans deux des quatre bandes d'arrêt. Deux de ces modes, autour de 752 m.s^{-1} , sont presque confondus et correspondent à des modes de cisaillement (déplacements dans le plan) qui se propagent le long du défaut d'AlN. Ils sont similaires aux modes de flexion évoqués dans le cas du composite PZT-résine. La troisième branche autour de 929 m.s^{-1} est celle du mode de torsion du défaut (rotation autour de son axe) qui se propage de même suivant x_3 .

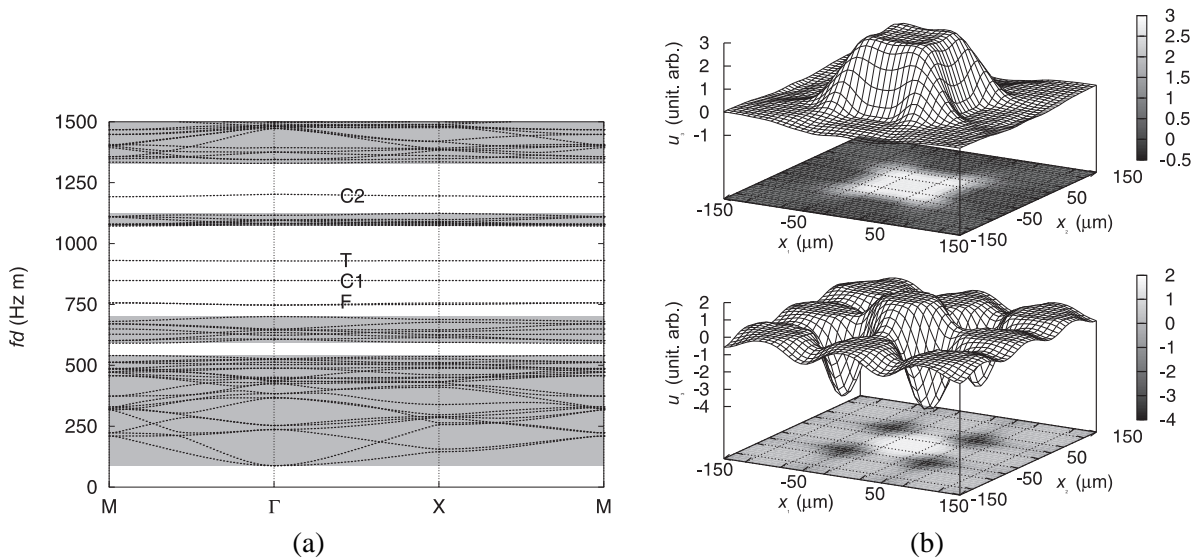


FIG. 7.39 – (a) Courbes de dispersion du composite avec défaut pour $\gamma_3 = 0, 1$. Les bandes d'arrêt du composite sans défaut sont reportées. Les modes isolés sont les deux modes de flexion (F), le mode de torsion (T), le mode de compression longitudinal (C1) et le premier mode latéral (C2). Pour chacun, la vibration est principalement localisée dans le défaut et dans sa proximité immédiate. (b) Champs de déplacements des modes C1 et C2.

Les déplacements, pour les deux modes restants autour de 848 m.s^{-1} et 1198 m.s^{-1} respectivement, sont reportés sur la figure 7.39(b). Ce sont deux modes de polarisation quasi-longitudinale (modes de compression). Le premier correspond au mode de compression fondamental, confiné dans le défaut et son environnement immédiat. Le deuxième fait apparaître un déplacement de la résine en opposition de phase du défaut. Il est similaire au premier mode latéral, et il est aussi confiné dans et autour du défaut.

De plus, les courbes de dispersion montrent que la vitesse de groupe de ces modes est quasi-nulle. Ce phénomène est le plus flagrant pour le mode de torsion et le mode de compression fondamental. En d'autres termes, cela signifie que l'énergie du mode est confinée dans le défaut et dans la résine immédiatement proche et qu'elle ne se propage pas aux cellules voisines. On voit là une solution potentielle pour réduire

les effets de diaphonies dus à la vibration utile du mode d'épaisseur. Au moment de la conception de la supercellule, il faut néanmoins avoir à l'esprit que la surface active de l'élément ne doit pas être trop réduite. Si on se tourne vers des solutions à inclusions cylindriques, la solution de la cellule hexagonale pourrait alors être avantageuse dans ce sens. De plus, il faut bien prendre garde à ce qu'aucun autre mode potentiellement couplé ne soit excité pour le point de fonctionnement choisi.

Enfin, il est bien évident que ce type de structures nécessite la mise au point de procédés de fabrication adaptés, avec une limite physique pour les transducteurs haute fréquence qui réclament des géométries très fines. Nous verrons des propositions dans ce sens dans la dernière partie.

7.3 Sonde complète 1D

Pour finir d'illustrer la méthode de l'analyse "périodique", on se propose d'étudier une sonde commerciale 1D de GE Parallel Design (anciennement Thales Microsonics). Il y a en effet globalement deux manières de construire une sonde sur un composite. On peut tout d'abord fabriquer le composite comme décrit dans la section 2.4.2, puis coller ensuite les différents éléments (absorbant, lames en face avant, connectiques, etc.). On peut aussi usiner le PZT massif après un assemblage préalable avec d'autres éléments tels que l'absorbant et les lames d'adaptation d'impédance. Cela permet notamment de faire en même temps les sous-découpes dans l'absorbant et éventuellement de découper les lames. Les découpes résultantes sont ensuite remplies avec une résine. C'est le cas de la sonde décrite ici.

7.3.1 Description

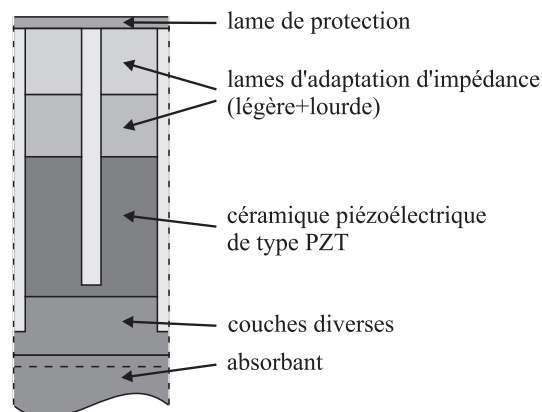


FIG. 7.40 – Sonde commerciale 1D composite colle-PZT : cellule élémentaire. La zone en pointillés représente la partie maillée.

La figure 7.40 représente une cellule élémentaire d'une sonde commerciale 1D. Pour des raisons de confidentialité, la description de la sonde restera qualitative. La cellule élémentaire est composée de deux sous-éléments constitués chacun d'un barreau de PZT surmonté de deux lames d'adaptation d'impédance lourde et légère respectivement. Les deux sous-éléments reposent sur un ensemble de couches diverses, que l'on ne détaillera pas, terminé par un absorbant. Ce dernier ensemble est découpé entre chaque élément de la sonde afin de minimiser le couplage des éléments du réseau par celui-ci. Enfin, les découpes sont remplies d'une colle de type résine époxy et une lame de protection recouvre le tout.

La zone en pointillés délimite la partie maillée de la sonde. L'épaisseur importante d'absorbant supplémentaire est prise en charge grâce aux conditions de rayonnement. On tient aussi compte d'une épaisseur de

lentille acoustique entre la sonde et le milieu de propagation – typiquement de l’eau puisque la sonde est à vocation médicale – dans les conditions de rayonnement appliquées en face avant.

Notons que l’on peut aussi considérer les lames d’adaptation d’impédance comme des lames composites au même titre que la partie transductive PZT-colle qui n’est rien d’autre qu’un composite 2-2.

De même que les dimensions de la structure ne sont pas données, les résultats suivants, donnés en fonction de la fréquence, seront normalisés sur l’abscisse par rapport à une fréquence arbitraire, que nous choisirons comme étant à peu près la fréquence centrale de la sonde. Enfin, la largeur de la sonde permet de se placer dans l’hypothèse des déformations planes et de se limiter à une étude 2D.

7.3.2 Comparaison calcul-mesure à différentes phases de fabrication

L’admittance de la sonde a été mesurée à différentes étapes de sa fabrication, à savoir :

- céramique, lames d’adaptation et couches diverses en face arrière assemblées et découpées,
- assemblage précédent collé sur un absorbant,
- état final avec la colle de remplissage, la lame de protection, la lentille, le tout en immersion dans l’eau.

On a reproduit ces différentes phases dans les calculs par éléments finis. Les résultats de mesures et de calculs sont reportés sur les figures 7.41 et 7.42 respectivement. Dans les deux premiers cas, la comparaison est faite sur la base de l’admittance harmonique (excitation synchrone de tout le réseau). Dans le troisième cas, on compare l’auto-admittance (admittance mutuelle de la cellule excitée).

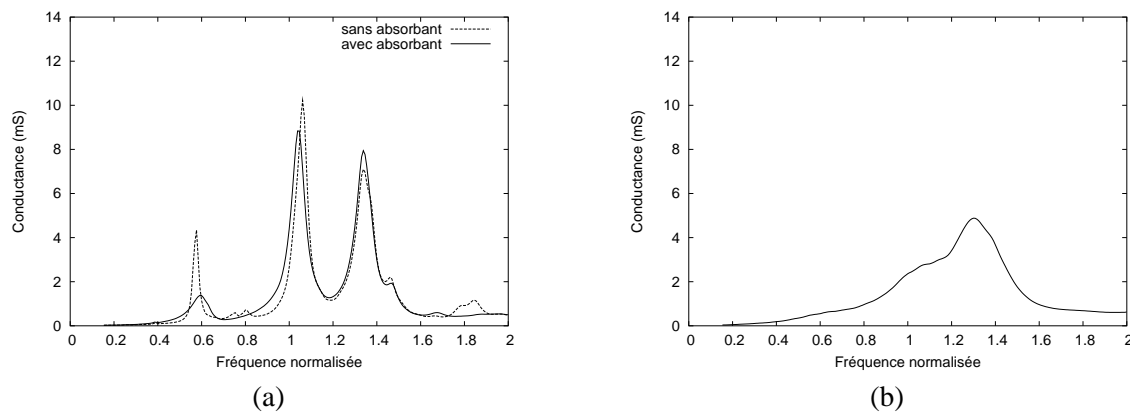


FIG. 7.41 – Mesure de la conductance de la sonde à différentes étapes de sa fabrication : (a) avant et après collage sur l’absorbant (interstices de découpe non remplis), (b) sonde complète en immersion.

Les trois pics principaux mesurés avant immersion sont dus aux modes de compression (modes d’épaisseur) de la céramique et des lames d’adaptation, ainsi que des couches en face arrière. Ce sont les vibrations utiles pour la fonction d’imagerie de la sonde. Le profil de déplacements suivant l’axe vertical x_2 est présenté sur la figure 7.43. Pour les deuxième et troisième résonances, on a globalement $3/2$ périodes sur la hauteur. Dans un cas, les lames d’adaptation vibrent en $\lambda/4$, et dans l’autre, en $\lambda/2$. Le processus d’amplification du déplacement par adaptation et diminution progressive de l’impédance acoustique est bien visible.

Si les sous-découpes ont le mérite de limiter les diaphonies, elles introduisent néanmoins un déséquilibre pour chaque sous-élément, lié à une dissymétrie de la structure. Ce déséquilibre est à l’origine des autres résonances, surtout visibles lorsque la structure n’est pas encore collée sur l’absorbant. Ce dernier induit un décalage de ces résonances à des fréquences plus hautes, et elles se confondent alors dans les résonances des modes longitudinaux. Ces modes parasites sont des modes de flexion suivant x_1 de chaque

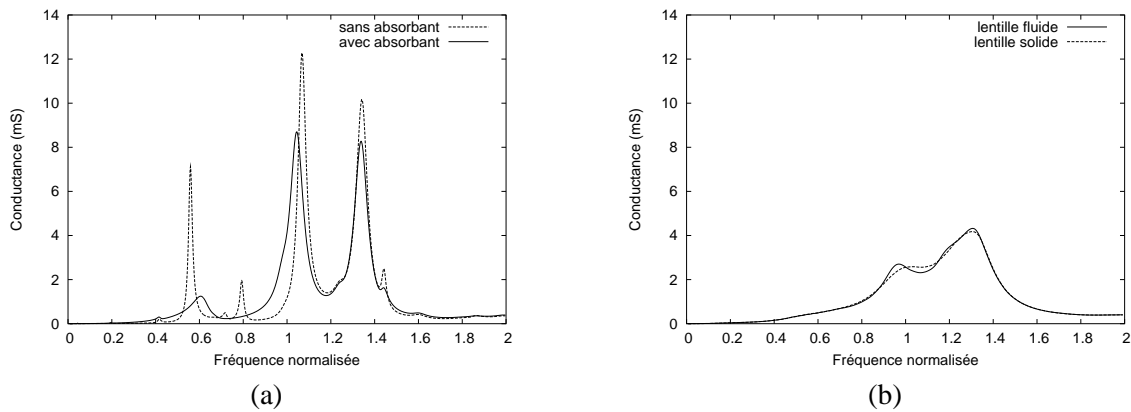


FIG. 7.42 – Conductance calculée de la sonde à différentes étapes de fabrication : (a) avant et après collage sur l'absorbant (interstices de découpe non remplis), (b) sonde en immersion avec deux types de lentilles (lentille idéale fluide, lentille réelle solide).

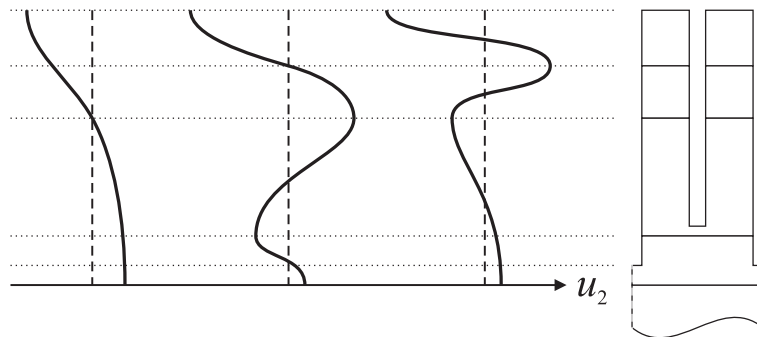


FIG. 7.43 – Profil du déplacement vertical pour les trois modes de compression utiles.

sous-élément pour différentes longueurs d'onde. L'introduction d'une colle de remplissage limite l'amplitude de ces modes, ainsi qu'on peut le voir sur le résultat de calcul de la figure 7.44.

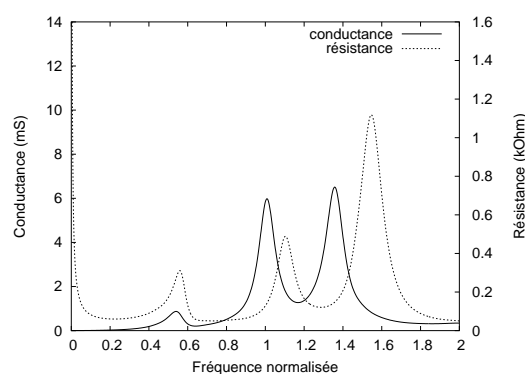


FIG. 7.44 – Conductance et résistance théoriques de la sonde en vibration dans le vide (sans lentille acoustique).

Enfin, le fluide exerce un effet de lissage des résonances. Le calcul a été effectué pour deux types de lentilles, une première considérée "fluide" et seulement définie par sa densité et sa vitesse longitudinale, une deuxième solide, ce qui revient à rajouter une vitesse transverse non-nulle. L'influence de la nature de la lentille n'est pas négligeable. La comparaison mesure-calcul montre la mauvaise connaissance de certains matériaux, et principalement de la vitesse transverse des ondes qui s'y propagent. Il serait nécessaire de

recaler certaines constantes, notamment concernant la colle de remplissage et la lentille. Enfin, on ne tient pas compte ici de la courbure de la lentille suivant la largeur, qui réalise la focalisation du faisceau dans le plan sagittal.

7.3.3 Influence de la colle de remplissage et de la lentille sur la propagation des ondes dans le réseau

Après avoir identifié les différentes vibrations de la structure, on regarde comment évolue l'admittance harmonique pour toutes valeurs du paramètre d'excitation γ_1 , en fonction de la présence ou non des différents constituants du transducteur.

Lorsque les interstices de découpe ne sont pas encore remplis (figure 7.45(a)), l'admittance montre qu'aucun mode ne se propage dans la structure (vitesse de groupe nulle). Les éventuelles ondes qui se propagent par l'absorbant ne sont pas visibles à cette échelle, d'une part compte tenu des pertes acoustiques des matériaux incriminés, d'autre part parce qu'elles sont aussi minimisées par les sous-découpes.

Après remplissage (figure 7.45(b)), les modes deviennent propagatifs, du fait du couplage des sous-éléments par la colle. A basses fréquences, on remarque l'apparition d'une nouvelle contribution similaire au premier mode de Lamb S_0 , onde de compression longitudinale qui se propage suivant x_1 dans le composite colle/sous-éléments. Ce mode est couplé aussi pour $\gamma_1 = 0,5$ à cause de la présence de deux sous-éléments par pixel électrique.

Enfin, on rajoute le couplage par la lentille. Dans le premier cas (figure 7.45(c)), la lentille est supposée fluide et semi-infinie. Dans le deuxième (figure 7.45(d)), elle est supposée d'épaisseur finie et recouverte d'eau. Le troisième (figure 7.45(e)) est celui d'une lentille solide et recouverte d'eau. Le deuxième cas de figure fait apparaître des ondulations dues à la réverbération (réflexions partielles multiples) des ondes à l'interface lentille-eau, lorsque l'on se trouve dans les conditions de rayonnement du réseau dans la lentille. Enfin on peut voir le changement apporté à la disposition des modes en considérant une vitesse transverse non-négligeable pour la lentille. Le mode S_0 , dont la vitesse est inférieure à celle de l'eau, ne rayonne pas.

Enfin on trace sur la figure 7.46 la pression "harmonique" en face avant à l'interface lentille-lame de protection, pour une lentille fluide semi-infinie et une lentille solide recouverte d'eau. Rappelons que la pression (résultante d'une certaine figure d'excitation) ainsi représentée est calculée en faisant la moyenne des forces normales exercées par un élément à l'interface lame de protection-lentille. Cela signifie que l'on peut avoir une pression résultante significative pour une vibration en opposition de phase ($\gamma_1 = 0,5$), alors que la pression en champ lointain sera quasi-inexistante par reconstruction du champ rayonné par le réseau (phénomènes de pression/dépression qui se compensent d'un élément à l'autre).

7.3.4 Fonctions de transfert

Afin de définir la bande passante d'une sonde, il est nécessaire de bien spécifier les grandeurs impliquées dans la fonction de transfert considérée. De plus, on peut définir des fonctions de transfert en émission, en réception, et en mode pulse-écho. Pour un réseau de phases, on peut aussi définir une fonction de transfert pour le réseau, et une autre pour un élément du réseau. Dans ce qui suit, on donne le résultat de quelques tentatives préliminaires d'établissement de fonctions de transfert.

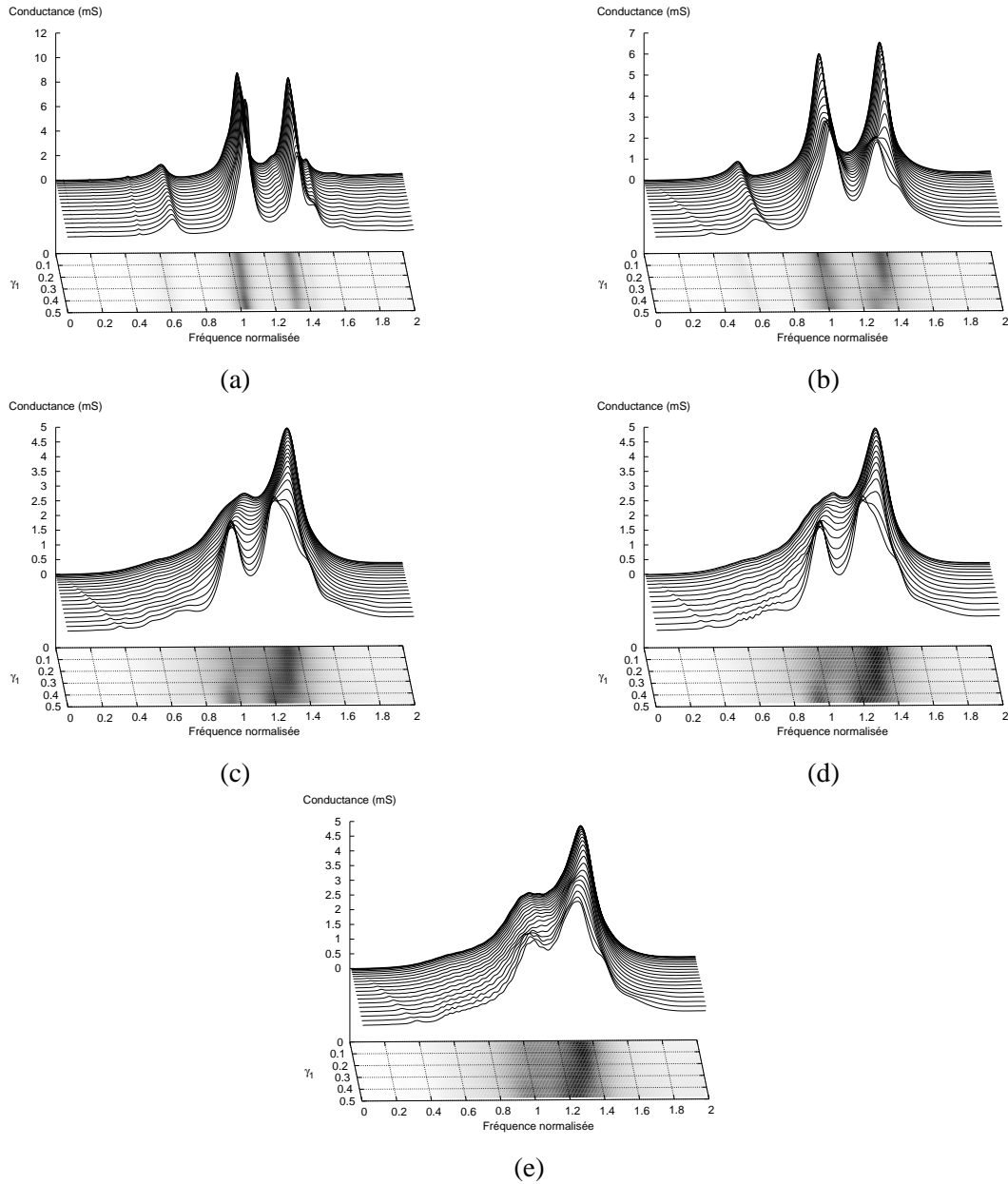


FIG. 7.45 – Conductance harmonique théorique à différentes étapes de fabrication : (a) après collage de l'absorbant, (b) après remplissage des interstices de découpe et collage de la lame de protection, (c) sonde complète surmontée d'une lentille idéale fluide semi-infinie, (d) sonde complète surmontée d'une lentille fluide d'épaisseur finie en immersion dans l'eau, (e) sonde complète surmontée d'une lentille réelle solide en immersion dans l'eau.

en émission

On choisit comme grandeur de sortie la pression émise en face avant de la sonde. On calcule donc une pression harmonique et, comme pour l'admittance, des pressions mutuelles correspondant à la pression émise par chaque élément du réseau lorsqu'un seul élément est excité. On superpose sur la figure 7.47 la pression harmonique pour une excitation synchrone de tous les éléments du réseau, et la pression mutuelle émise par l'élément excité.

Pour chacune, on peut encore distinguer la contribution des trois modes de compression. Si la largeur de bande est sensiblement la même à -6 dB, celle de la pression mutuelle est inférieure à celle de la pression harmonique à -20 dB.

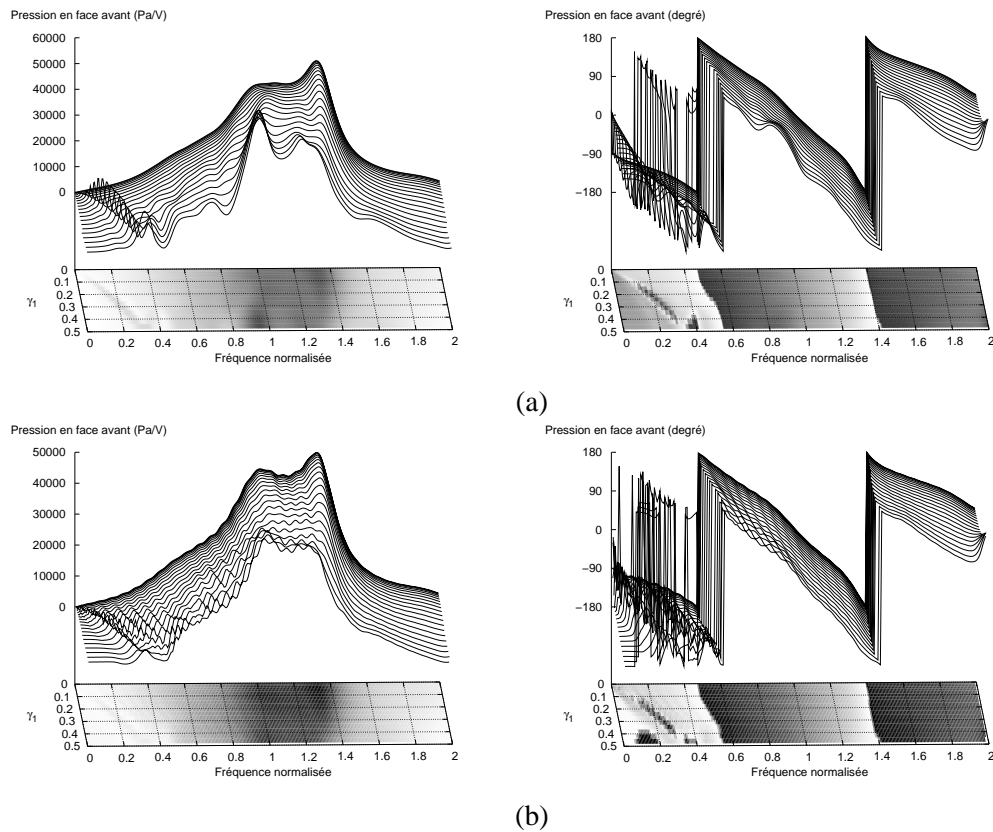


FIG. 7.46 – Pression harmonique, en amplitude et phase, à l’interface lame-lentille pour (a) une lentille idéale fluide semi-infinie et (b) une lentille réelle solide en immersion dans l’eau.

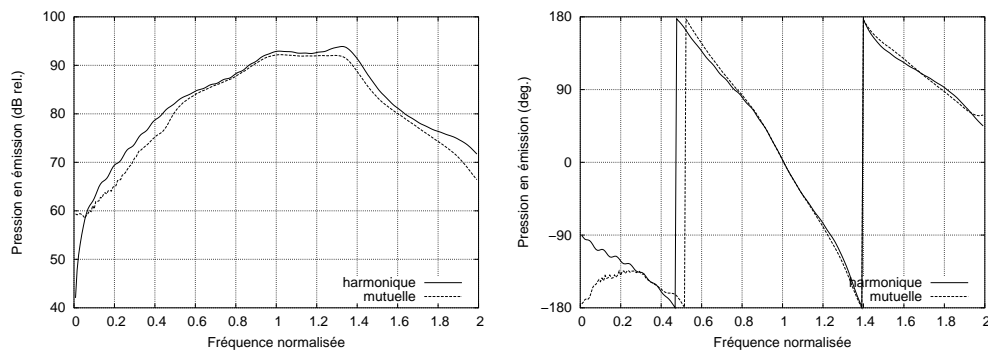


FIG. 7.47 – Pression en face avant d’un élément de la sonde dans des conditions d’excitation synchrone du réseau (pression harmonique) ou lorsque seul cet élément est excité (pression mutuelle).

La pression harmonique à γ_1 nul signifie que le réseau vibre de façon synchrone et il n’y a pas propagation d’ondes le long du réseau.

Lorsqu’un élément est excité seul, il est soumis à l’influence de ses multiples voisins plus ou moins proches avec lesquels il interagit, soit par couplage directement dans le réseau (par la colle de remplissage), soit par couplage par le milieu de propagation dans lequel il rayonne. Toutes les contributions à la pression harmonique (voir figure 7.46) sont susceptibles de prendre place dans le réseau, alors que celui-ci est excité localement – c’est par ailleurs le sens profond de la transformée de Fourier qui relie les grandeurs mutuelles aux grandeurs harmoniques.

Son fonctionnement est donc plus ou moins altéré en fonction des diaphonies qui y apparaissent, ce qui se traduit par une diminution de la bande passante. Enfin la pression mutuelle fait apparaître à basses

fréquences (avant 0,3) des ondulations qui ne sont pas dues à la réverbération évoquée plus haut, mais à l'interférence des multiples ondes réfléchies partiellement sur les interfaces colle/sous-élément lors de la propagation du mode S_0 .

en réception

Pour calculer une fonction de transfert en réception, on change un peu la méthode. Jusqu'à présent, l'excitation consistait en l'application d'un potentiel électrique sur les électrodes du transducteur.

Ici, l'excitation consiste en une pression dynamique et uniforme en face avant de la sonde. Deux cas extrêmes s'offrent alors à nous pour les conditions aux limites électriques. Soit les transducteurs sont en court-circuit, on fixe juste le potentiel des électrodes à zéro. Le deuxième cas est moins trivial. Il s'agit d'une condition de circuit ouvert, ce qui revient à imposer un potentiel de référence sur une électrode (classiquement la masse) et une condition d'isopotential sur la deuxième. En pratique, cela signifie que tous les nœuds appartenant à cette électrode ont un potentiel égal à celui d'un seul nœud de l'électrode, et on obtient autant de conditions en relations linéaires.

Dans le premier cas, on choisit comme grandeur de sortie la densité de charges électriques qui circulent entre les électrodes, et dans le deuxième le potentiel électrique. Il est évident que les conditions aux limites électriques en sortie dépendent de l'instrumentation de détection, qui devra être prise en compte pour des analyses futures. Pour le moment, on se contente des deux conditions extrêmes pour poser les premières bases.

On reporte les résultats sur la figure 7.48. On considère uniquement une excitation synchrone du réseau, autrement dit l'excitation est une onde de pression plane qui arrive à incidence normale de la sonde.

Les deux conditions correspondent aux conditions de résonance et d'antirésonance du réseau, ce qui explique la position fréquentielle des contributions dans les deux cas.

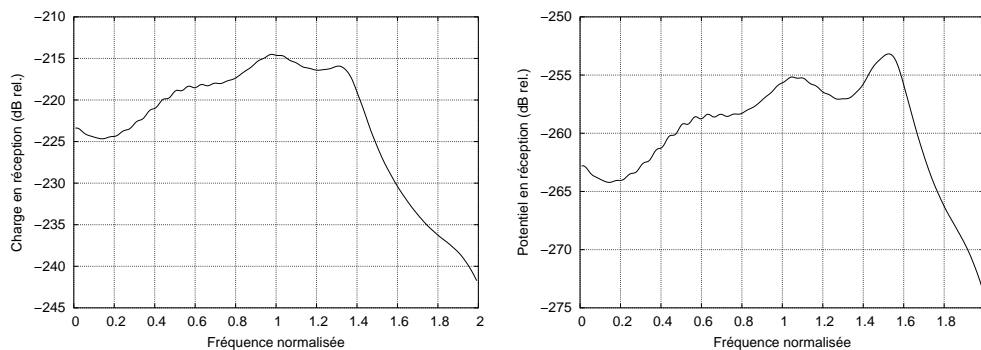


FIG. 7.48 – Réponse en court-circuit (calcul de la charge) ou en circuit ouvert (calcul du potentiel) du réseau soumis à une excitation uniforme en pression sur la face avant.

mode pulse-écho

Dans ce calcul, on envisage le cas où tout le réseau vibre de façon synchrone et émet une onde plane vers une cible plane qui réfléchit totalement le signal. On obtient au retour une onde plane à incidence normale du réseau.

En première approximation, on multiplie les fonctions de transfert en émission et en réception qui correspondent à ce cas de figure. En émission, on prend en sortie la pression harmonique et en réception, on considère les deux cas de figure présentés pour les conditions électriques.

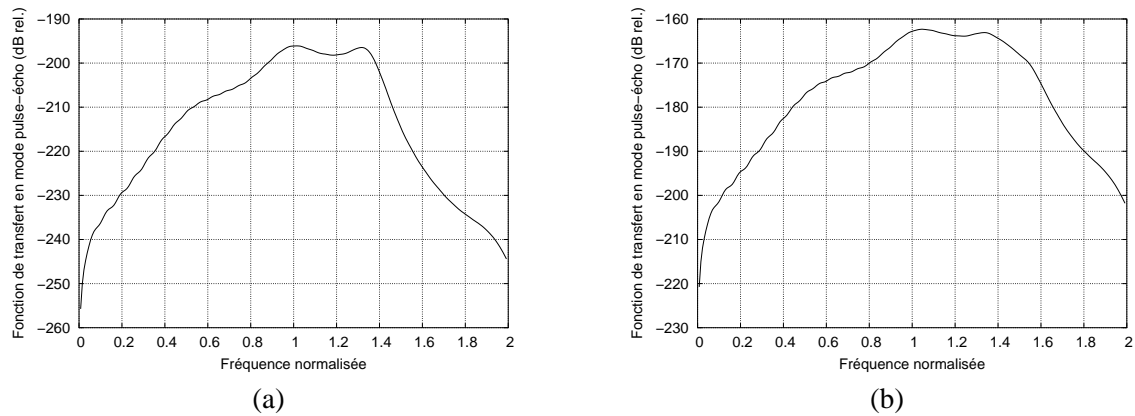


FIG. 7.49 – Première approximation de la fonction de transfert de la sonde en mode pulse-écho pour une excitation synchrone du réseau, suivant deux conditions aux limites électriques en réception : (a) en court-circuit, (b) en circuit ouvert.

Dans le cas de la réception en circuit ouvert (figure 7.49(b)), les contributions aux fréquences d'antirésonance s'ajoutent aux contributions des résonances à l'émission et améliorent le profil de la fonction de transfert en mode pulse-écho. La bande passante est élargie et on se rapproche plus d'un profil gaussien (qui donne une parabole en échelle logarithmique).

Le cas d'un seul élément excité pourrait être traité en incluant la cible dans les conditions de rayonnement – en considérant un multicouche lentille-eau-cible comme milieu de propagation – et un post-traitement adéquat pourrait permettre de remonter à la fonction de transfert désirée. On ne garde qu'un écho, par fenêtrage temporel, dans le signal issu de la transformée de Fourier inverse du spectre obtenu par le calcul. On effectue ensuite une transformée de Fourier pour revenir dans l'espace des fréquences. Ce type de traitement n'a pas été réalisé par faute de temps, mais il s'inscrit parfaitement dans de futurs développements qui mettront l'accent sur l'exploitation poussée des grandeurs mutuelles, et sur un post-traitement élaboré de toutes les données fournies par l'analyse périodique.

Chapitre 8

Transducteurs micro-usinés sur silicium (MUTs)

Les sondes à base de PZT massif font appel pour leur fabrication à des techniques de découpage, moulage ou collage standards de l'industrie des microtechniques horlogères. L'avènement des méthodes de microfabrication dérivées de la micro-électronique pour la mise en œuvre de microsystèmes a stimulé l'imagination de certains chercheurs du domaine de l'acoustique. Ainsi, ce qui était au démarrage une étude sur les dispenseurs de résine photosensible pour l'éjection de goutte à l'aide d'un mode de flexion a été repensé par B. T. Khuri-Yakub comme un moyen d'engendrer de la pression dans un fluide [79, 80]. En ce sens, il n'a fait que revenir à l'idée originale de Chilowsky, ensuite développée par Langevin pour son prototype de sonar (le condensateur "chantant") [1]. Parallèlement, d'autres chercheurs ont pressenti l'intérêt de tels modes pour les applications échographiques aériennes (voir par exemple [81–83]). La juxtaposition de l'idée de base avec des méthodes de fabrication nouvelles a rendu possible la réalisation de dispositifs viables, en tirant parti d'effets physiques liés aux petites dimensions (loi de Paschen sur les champs disruptifs).

Ce qu'on appelle transducteurs micro-usinés sur silicium ou MUTs (*Micromachined Ultrasonic Transducer*) sont des membranes vibrant sur leur mode de flexion fondamental, usinées sur des plaquettes de silicium au moyen de technologies de microfabrication collective. Les types d'excitation développés actuellement pour faire vibrer les membranes sont soit capacitif, soit piézoélectrique. On s'intéresse ici à un archétype de ces transducteurs, dans le sens où l'on considère un réseau périodique de membranes sans pour le moment prendre en compte tous les éléments, comme par exemple les électrodes, qui engendreraient des effets d'ordre supérieur.

Les transducteurs micro-usinés sont devenus un thème prioritaire de la recherche en acoustique ultrasonore et se présentent comme une alternative aux sondes modernes fondées sur les structures composites. Ils ouvrent de nouvelles opportunités quant au développement de dispositifs d'imagerie présentant une haute densité d'intégration. Leur aptitude à faire des images a récemment été démontrée [84, 85]. Ils font preuve d'une meilleure résolution axiale que les sondes à base de céramique, toutefois leur sensibilité doit encore être améliorée. Des capteurs et des actionneurs à base de tels transducteurs ont aussi montré un certain potentiel pour des applications microfluidiques [86]. Cependant, ils présentent encore des problèmes de diaphonies rédhitoires pour leur utilisation dans les réseaux de phase, même si certaines solutions ont déjà été proposées [87] (sous-découpes, "collage" des cellules inutilisées par application d'une tension suffisante).

Au même titre que les sondes d'imagerie actuelles, les sondes à base de transducteurs micro-usinés sont aussi des structures massivement périodiques. Les développements spécifiques menés autour de la méthode

des éléments finis sont particulièrement bien adaptés à l'analyse de ces structures. Pourtant, les résultats de simulations trouvées dans la littérature, que ce soit par un logiciel d'éléments finis du commerce tel que ANSYS ou par des circuits électriques équivalents, n'apportent aucune clef de compréhension quant aux causes des effets de diaphonies. Nous nous proposons donc, en appliquant l'approche périodique avec les concepts de grandeurs harmoniques et mutuelles, de mettre au clair la part liée à la périodicité de telles structures quant à leur fonctionnement, qui s'avère loin d'être négligeable. Par cette étude préliminaire, au sens où le type de l'excitation n'est pas ici déterminé, on compte donner les premiers éléments de compréhension quant au comportement des réseaux de MUTs en immersion, que ce soit des MUTs capacitifs (hors fonctionnement avec la membrane collée) ou piézoélectriques. Dans le deuxième cas, un redimensionnement est nécessaire si l'on veut conserver un comportement identique aux cMUTs, puisqu'à l'épaisseur et à la masse de la membrane viennent s'ajouter celles de la pastille de céramique qui permet l'actionnement.

8.1 Descriptif de la structure

La cellule élémentaire étudiée comprend une membrane circulaire en nitrure de silicium (Si_3N_4), portée par un substrat de silicium. Le diamètre de la membrane est de $80\text{ }\mu\text{m}$ pour une période de la cellule de $90\text{ }\mu\text{m}$. L'espace entre la membrane et le substrat est égal à $0,5\text{ }\mu\text{m}$ pour une membrane d'épaisseur $1\text{ }\mu\text{m}$. Le maillage de la membrane est présenté sur la figure 8.1. On utilise comme pour le composite des éléments de degré 2, qui sont par ailleurs le minimum requis pour un problème en flexion. Une fine épaisseur du substrat est maillée afin de permettre l'application de conditions aux limites de rayonnement dans le substrat.

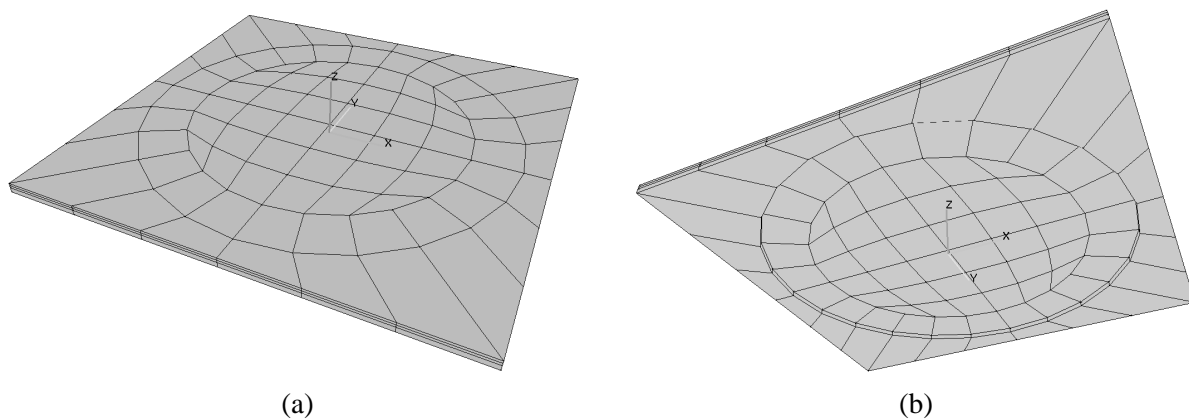


FIG. 8.1 – Maillage de la membrane : (a) face avant, (b) face arrière.

On suppose un fonctionnement capacitif du transducteur. On applique une force harmonique sur la membrane, similaire à la force exercée par une excitation de type capacitif. Dans tous les calculs présentés, on ne tient pas compte de la variation de la force électrostatique en fonction de l'entrefer entre la membrane et le substrat où on suppose les électrodes. En conséquence, on se concentre uniquement sur le comportement purement mécanique d'un tel réseau de transducteurs.

8.2 Fonctionnement synchrone

On considère d'abord une excitation synchrone de tous les transducteurs du réseau en fixant les paramètres d'excitation γ_1 et γ_2 à zéro. Autrement dit, toutes les membranes sont excitées en phase par une force d'amplitude constante. Dans un premier temps, on suppose le substrat de silicium semi-infini. On

traite deux milieux de propagation différents en face avant des membranes. En premier, on envisage simplement un fonctionnement dans le vide, puis ensuite un fonctionnement en immersion dans l'eau. La figure 8.2 présente les déflexions moyennes comparées des deux cas.

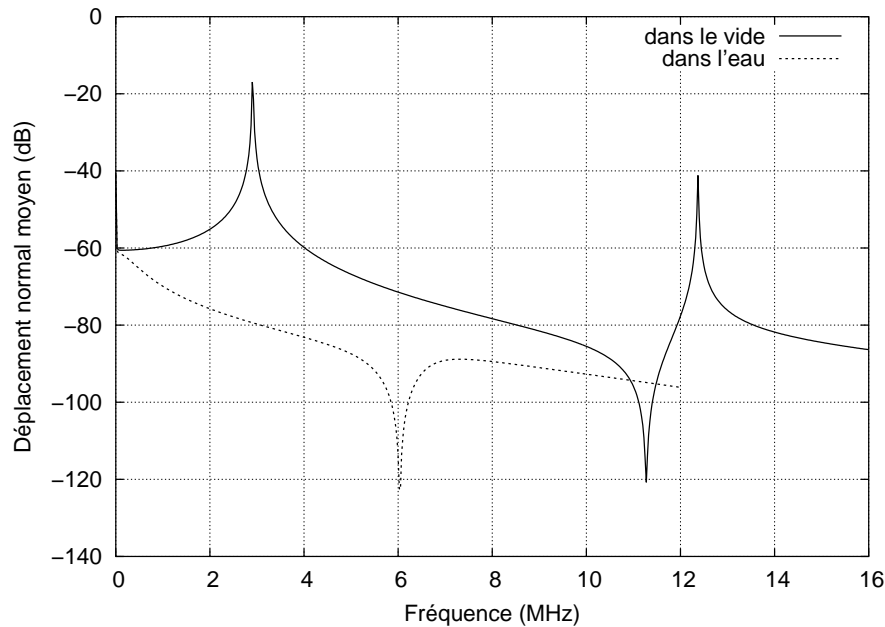


FIG. 8.2 – Déflexions moyennes comparées des membranes vibrant de façon synchrone dans le vide et dans l'eau.

Dans l'air, deux pics de résonance apparaissent à 2,91 MHz et 12,37 MHz respectivement. Ces deux résonances correspondent au mode fondamental de flexion des membranes et au second mode de flexion symétrique (respectivement notés (0, 1) et (0, 2) sur la figure 8.3.

Lorsque les membranes sont chargées par l'eau, les modes sont repoussés à des fréquences plus basses. De plus, le réseau de membranes ne présente plus de contributions véritablement résonantes, induisant un fonctionnement intrinsèquement large-bande. Dans le cas uni-dimensionnel, il a été montré [88] que les pics de résonance d'une membrane unique rayonnant dans l'eau sont décalés vers des fréquences inférieures, mais que la membrane présente encore un comportement résonant. Le décalage en fréquence augmente avec le nombre de cellules du réseau, et l'amplitude du déplacement diminue. De plus, les pics de résonance sont de moins en moins marqués jusqu'à ce que le réseau ne soit plus résonant.

N'oublions pas que la quantité considérée est le déplacement moyen sur une cellule, qui peut être nul alors que la membrane vibre toujours. Dans le cas du fonctionnement en immersion, la membrane vibre sur le mode fondamental (0, 1) à basses fréquences, et la vibration évolue de ce mode au mode (0, 2) autour de 7 MHz, si bien que la déflexion moyenne passe par un minimum autour de 6 MHz qui s'explique par la forme particulière du mode (0, 2).

La réponse d'une membrane est intimement liée à ses caractéristiques géométriques, notamment son diamètre et son épaisseur. La vitesse moyenne de la membrane en face avant a été calculée pour différentes épaisseurs à diamètre fixé. Les résultats sont reportés sur la figure 8.4. Dans chaque cas, le réseau présente un comportement large-bande. L'épaisseur de la membrane détermine la fréquence de travail. Rappelons que dans le vide la fréquence de résonance est proportionnelle à l'épaisseur et inversement proportionnelle au carré du diamètre de la membrane.

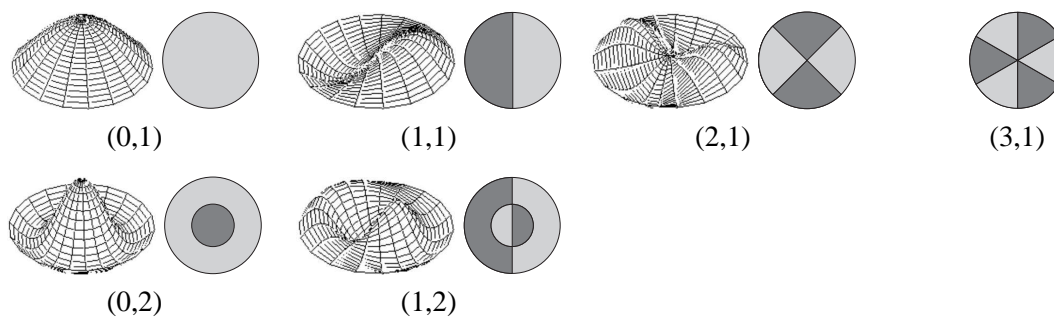


FIG. 8.3 – Modes de vibration d'une peau de tambour. La nomenclature utilisée pour identifier les modes est (d, c) où d est le nombre de diamètres nodaux et c le nombre de cercles nodaux, où le déplacement est nul. Les lobes vibrant en opposition de phase sont représentés pour chaque mode. D'après [34].

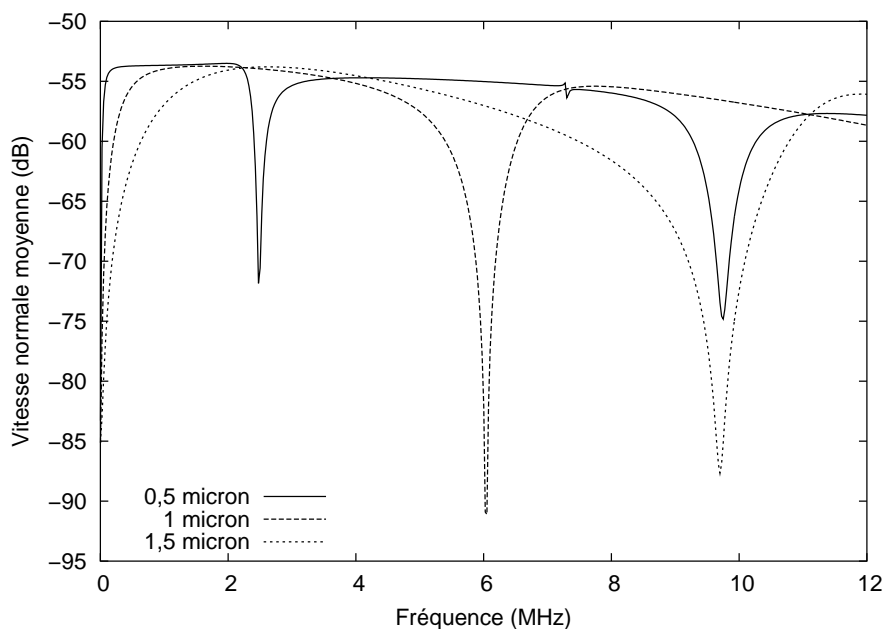


FIG. 8.4 – Vitesse normale moyenne sur une cellule de la membrane en face avant pour trois épaisseurs différentes, à savoir $0,5 \mu\text{m}$, $1 \mu\text{m}$ et $1,5 \mu\text{m}$.

8.3 Distribution harmonique des forces d'excitation

8.3.1 Description des modes

On considère maintenant une excitation spatiale harmonique en forces. Le paramètre d'excitation γ_2 est fixé à zéro tandis que γ_1 varie entre 0 et 0,5, ce qui correspond à des rangées de membranes excitées avec un déphasage égal à $2\pi\gamma_1$ entre deux rangées voisines. Cela revient à considérer une sonde 1D constituée d'un réseau 2D de MUTs.

Le résultat est présenté sur la courbe 8.5. La déflexion harmonique moyenne est tracée en fonction de la fréquence de l'excitation et du paramètre d'excitation γ_1 . On observe différentes contributions résumées sur la figure 8.6.

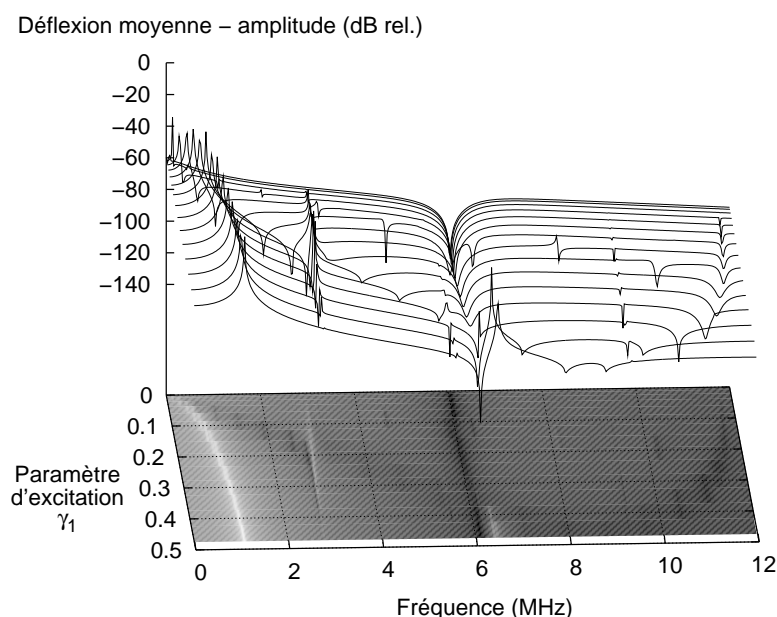


FIG. 8.5 – Déflexion harmonique moyenne d'une membrane du réseau.

Deux ondes très peu dispersives se propagent le long de l'axe x_1 , avec des vitesses respectives de l'ordre de 1500 m.s^{-1} et 4850 m.s^{-1} . Si on établit une comparaison avec un système silicium-eau en faisant abstraction des membranes, la première onde est analogue à une onde d'interface [77] aussi connue sous le nom d'onde de Stoneley–Scholte. Elle est évanescente dans les deux milieux et majoritairement localisée dans l'eau. Si on s'intéresse de nouveau au système global, le mode de vibration des membranes, qui accompagne la propagation de l'onde d'interface, est le mode (1, 1) représenté sur la figure 8.3. Comme les calculs réduisent intrinsèquement le problème à la première zone de Brillouin, on trouve au-dessus de 8,4 MHz le repliement de l'onde d'interface. Toutefois, pour cette branche, l'onde ne se propage plus sans pertes. Le mode de membrane associé à cette branche est le mode (1, 2).

Le deuxième mode est similaire à une onde de Rayleigh – une onde de surface – se propageant dans le substrat pour un intervalle spécifique de γ_1 si on se restreint à la bande de fréquences de travail. En pratique, il est créé par les contraintes appliquées au substrat là où les membranes sont fixées. Son existence est liée au fait que le substrat de silicium n'est pas directement en contact avec l'eau, mais qu'il est en partie protégé par les membranes avec l'entrefer. Dans ce cas, la vibration pré-existante de la membrane n'est pas affectée, mais le déplacement d'ensemble du substrat s'y superpose. De plus, cette onde de surface est partiellement amortie par la présence de l'eau puisque le substrat n'est pas protégé sur toute sa surface. Les pertes liées à

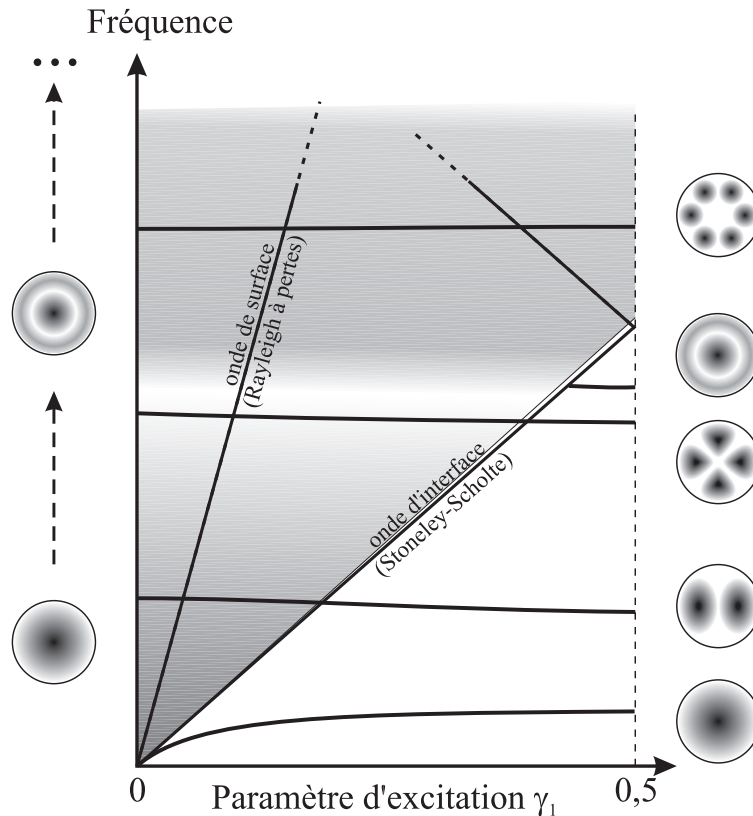


FIG. 8.6 – Diagramme résumant le fonctionnement d'un réseau de MUTs, avec les courbes de dispersion des modes résonants et les zones où le réseau rayonne dans l'eau.

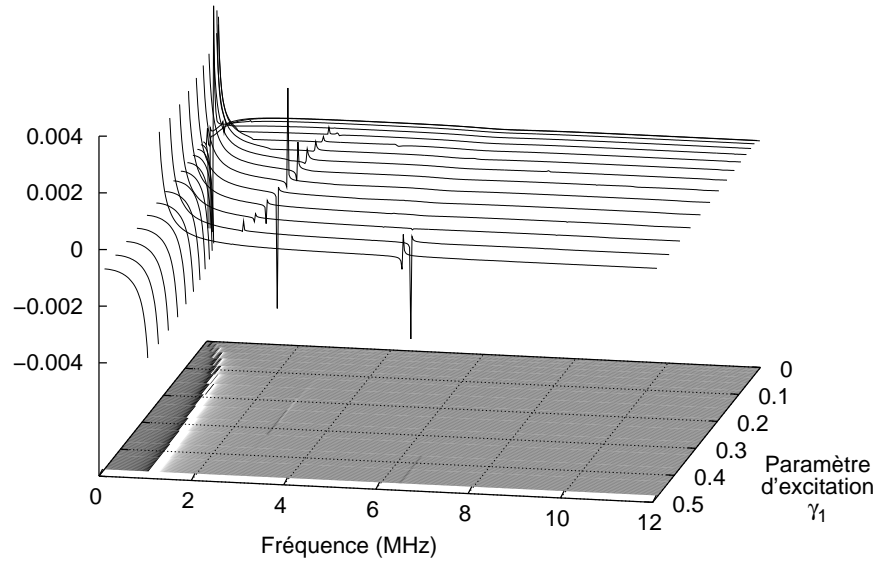
cet amortissement induisent un rayonnement parasite.

Les autres contributions sont intimement liées à la géométrie des transducteurs. Les champs de déplacement associés à celles-ci sont ceux d'une membrane circulaire. Les modes en question sont résumés sur la figure 8.3 [34]. La figure 8.6 associe chaque contribution à sa forme de mode spécifique. Suivant leur degré de symétrie, ces modes sont plus ou moins couplés suivant la valeur de γ_1 . Le mode (2, 1) n'est pas couplé pour $\gamma_1 = 0$ tandis que les modes (1, 1) et (3, 1) ne sont pas couplés pour γ_1 égal à 0 et 0,5. De plus, ces modes résonants (en-dehors des modes à symétrie de révolution) ne sont pas couplés lorsque le réseau fonctionne dans le vide, et ce quelle que soit la valeur de γ_1 . Ils n'existent que par la présence du fluide qui tient lieu de milieu de couplage entre les membranes voisines.

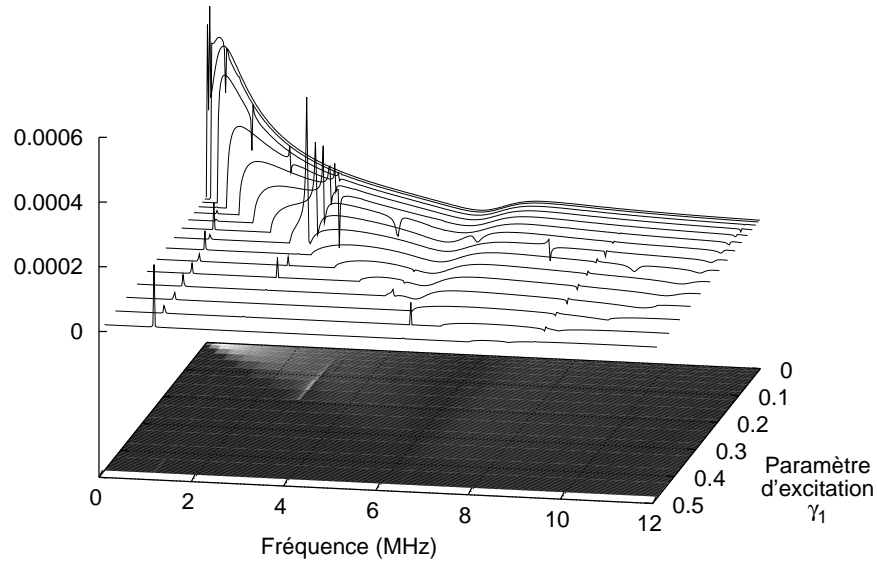
Si on trace séparément les parties réelle et imaginaire du déplacement normal moyen (voir figure 8.7), on peut déterminer les gammes de fréquence pour lesquelles le réseau rayonne dans l'eau en fonction du paramètre d'excitation.

L'analyse est comparable au problème d'un dispositif à ondes de surface, pour lequel la partie imaginaire de la charge indique les pertes – le rayonnement – dans le substrat, autrement dit les ondes de volume se propageant vers l'intérieur du substrat. Dans notre cas, la partie imaginaire du déplacement normal indique la transmission de l'énergie acoustique dans l'eau tandis que les pôles de la partie réelle sont significatifs des modes résonants.

Le rayonnement apparaît au-delà d'une certaine limite qui correspond à la vitesse des ondes élastiques de volume dans l'eau. Cette limite réduit la bande passante de la sonde quand le paramètre d'excitation γ_1 est différent de zéro, par exemple si on veut réaliser une déflexion du faisceau ultrasonore (voir section 2.3). Comme elle ne dépend que de la vitesse dans le fluide, cette limite peut être repoussée à basses fréquences

Déflexion moyenne – partie réelle (μm)


(a)

Déflexion moyenne – partie imag. (μm)


(b)

FIG. 8.7 – Déflexion harmonique moyenne, (a) partie réelle et (b) partie imaginaire, pour γ_1 variant de 0 à 0.5 (avec $\gamma_2 = 0$).

en augmentant le nombre de rangées de MUTs dans un pixel – toutes les rangées appartenant à un même pixel sont excitées en phase – ce qui revient à augmenter la période du réseau de phases. De plus, comme on l’a vu dans le cas du composite 2-2, les branches successives repliées par cette opération sont rapidement atténuées. Néanmoins on doit prendre soin que la période effective ainsi obtenue ne dépasse pas une certaine valeur afin d’éviter l’apparition de lobes secondaires dans le diagramme de rayonnement.

Sous la limite de rayonnement, le mode fondamental de flexion et son harmonique résonnent à nouveau, tandis que les autres modes de membrane sont résonants même au-delà de cette limite.

8.3.2 Substrat d’épaisseur finie

Dans le cas du substrat semi-infini, une onde de surface a été montrée se propageant dans le réseau. Dans la pratique, on ne travaille évidemment pas avec des substrats semi-infinis, mais avec des plaques de silicium de quelques centaines de microns d’épaisseur.

Pour des longueurs d’ondes de l’ordre de celles de l’onde de surface évoquée précédemment, les substrats de silicium sont susceptibles de guider des modes de plaque encore appelés modes de Lamb [3]. On traite le cas d’un substrat réaliste afin d’analyser ce qui se passe réellement. Dans l’analyse qui suit, on considère un substrat d’une épaisseur de $480\ \mu\text{m}$ en lieu et place du substrat semi-infini. Notons une nouvelle fois que le maillage ne change pas. Le caractère fini du substrat est pris en compte via les éléments de frontière et traité avec la méthode de la matrice de diffusion.

Par rapport au cas semi-infini, l’onde de surface n’existe plus comme on pouvait s’y attendre, mais des modes additionnels apparaissent sur la déflexion moyenne tracée sur la figure 8.8(a). On reporte sur la figure 8.8(b) les courbes de dispersion d’une plaque de silicium de l’épaisseur considérée. On identifie les modes symétriques S_0 et S_1 ainsi que les modes antisymétriques A_0 et A_1 [3]. La superposition des deux diagrammes confirme que les contributions observées sont dues à des modes de plaque se propageant dans le substrat. Comme dans le cas de l’onde de surface, ces modes sont générés par les déplacements de membranes qui induisent des contraintes aux points d’ancrage. La présence du fluide induit des pertes par rayonnement des ondes de Lamb, de telle sorte que des contributions parasites se superposent au rayonnement utile, comme il a déjà été montré expérimentalement [87]. Avec nos dimensions, seuls les modes S_0 et A_0 peuvent affecter le diagramme de directivité, étant donné que les autres modes de plaque sont localisés en-dehors de la bande de fréquences de travail du réseau.

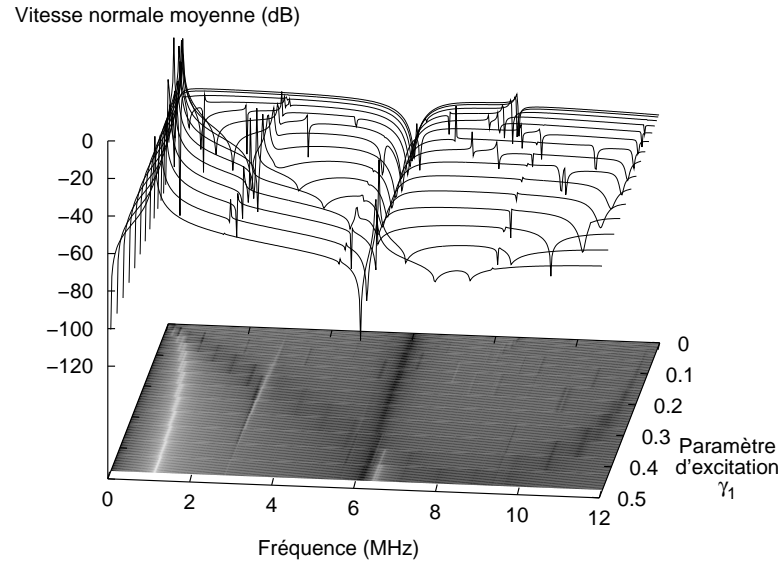
8.3.3 Couplages inter-éléments

On s’attend à ce que les modes précédemment évoqués perturbent le fonctionnement des réseaux de MUTs dédiés à l’imagerie, puisqu’ils sont susceptibles de provoquer des couplages inter-éléments, et ainsi de dégrader le diagramme de directivité ainsi que la bande passante. Les effets de diaphonie sont étudiés numériquement grâce au concept de quantités mutuelles décrit dans la section 3.2.

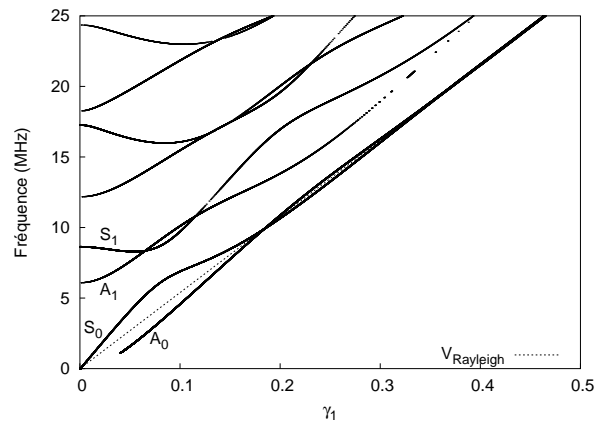
On calcule les vitesses normales mutuelles par intégration numérique avec 30 points de Gauss [75]. Le résultat est présenté sur la figure 8.9.

Dans la gamme de fréquences de travail, et en-dehors des modes résonants, on observe une atténuation de 10 dB entre la cellule excitée et la rangée voisine, puis entre les deux premières rangées voisines. Parce que dans ce cas les membranes ne vibrent pas sur une résonance, les effets de couplage s’atténuent relativement vite malgré la présence de l’eau.

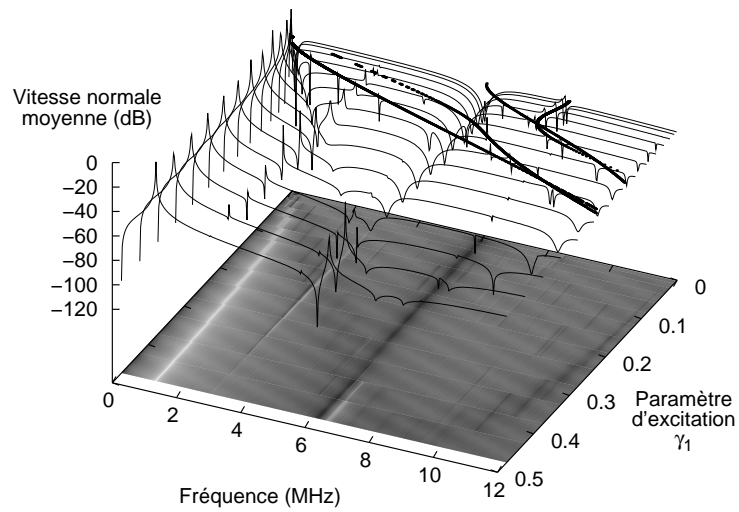
D’importants effets de diaphonie ont lieu à basses fréquences sous 1,05 MHz, qui est la fréquence de coupure du mode $(0, 1)$ indiqué sur le diagramme 8.6. Pour une fréquence donnée sous la fréquence



(a)



(b)



(c)

FIG. 8.8 – (a) Vitesse harmonique normale moyenne d'une membrane en face avant dans le cas d'un substrat épais de $480 \mu\text{m}$, (b) Courbes de dispersion de la plaque de silicium équivalente, (c) superposition des deux diagrammes.

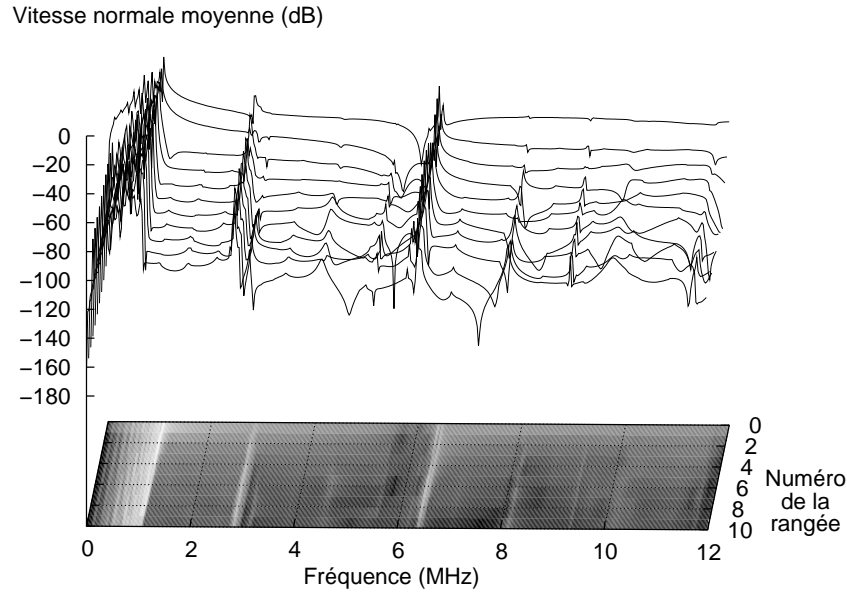


FIG. 8.9 – Vitesses normales moyennes mutuelles des membranes en face avant de la cellule excitée et des dix premiers voisins.

de coupure, le mode se propage le long de la structure avec une vitesse de groupe donnée par $\frac{\partial \omega}{\partial k_1} = d_1 \frac{\partial f}{\partial \gamma_1}$. De plus, l'onde subit de multiples réflexions partielles au cours de sa propagation dans le réseau, et la nature périodique de la structure induit alors des interférences constructives ou destructives. Celles-ci expliquent les ondulations qui apparaissent sous la fréquence de coupure. A la fréquence de coupure, un régime stationnaire s'établit (vitesse de groupe nulle), toutes les rangées vibrent, deux rangées voisines vibrant en opposition de phase. Dans ce cas, la longueur d'onde vaut deux fois la période du réseau. En augmentant le nombre de cellules élémentaires composant un pixel, on réduit la gamme de fréquences pour laquelle le mode se propage (par repliement du mode et atténuation des branches repliées), autrement dit on diminue sa fréquence de coupure. Les couplages induits par ce mode sont aussi décalés à des fréquences plus basses de telle sorte qu'ils sortent de la gamme de fréquences de travail (en prenant la bande passante à -6 dB).

On remarque autour de 8 MHz l'onde d'interface qui est soumise au phénomène de diffraction de Bragg. On observe aussi d'autres contributions localisées en fréquence qui sont dues aux modes résonants évoqués plus haut. La contribution importante autour de 6,4 MHz est due à la part résonante du mode (0, 2). Toutefois, en abaissant la limite de rayonnement, ce mode se retrouve entièrement localisé dans la zone fréquence-paramètre d'excitation pour laquelle l'énergie acoustique est transmise dans le fluide et il ne présente alors plus de caractère résonant.

Le véritable problème vient du mode antisymétrique (1, 1) qui est situé au milieu de la bande de travail de la sonde autour de 3 MHz. Ce mode est toujours résonant, que le réseau soit en condition de rayonnement ou non, et son existence est liée à la présence du fluide qui couple les membranes. La propagation de ce mode le long du réseau génère d'importants effets de diaphonie qui sont susceptibles de fortement altérer le diagramme de directivité d'un côté et la bande passante de l'autre, entraînant une réponse impulsionnelle dégradée.

A terme, l'enjeu de la conception des MUTs pour les réseaux de phase réside dans l'identification des paramètres cruciaux et dans la suppression des modes parasites, comme ici le mode (1, 1).

Pour finir, on calcule la pression résultante en face avant pour chaque rangée de membranes. La pression moyenne harmonique est reportée sur la figure 8.10. La phase est significative de la construction ou non d'une onde de pression acoustique rayonnée dans le fluide. Elle est constante en l'absence de rayonnement, autrement dit elle ne présente pas de rotation de phase en-dehors des brusques déphasages de 180 degrés dus aux résonances. Etant donné que l'on calcule dans ce cas une pression moyenne et non plus un déplacement moyen (ou une vitesse moyenne), l'onde d'interface ne se caractérise plus par un minimum. L'ensemble des contributions décrites précédemment sont présentes sur la pression. Hors résonances, l'amplitude de pression est légèrement inférieure à celle de la pression émise lorsque le réseau rayonne. Les pressions moyennes mutuelles résultantes (voir figure 8.11) confortent l'analyse menée à partir du calcul des vitesses moyennes.

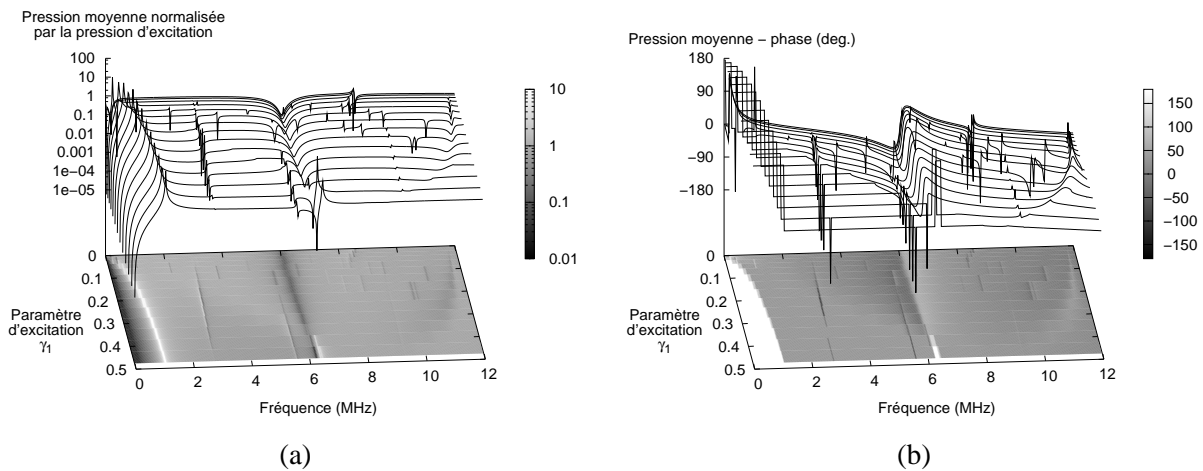


FIG. 8.10 – Pression moyenne harmonique calculée sur une cellule en fonction du paramètre d'excitation γ_1 , normalisée par la densité de force appliquée sur une partie de la membrane.

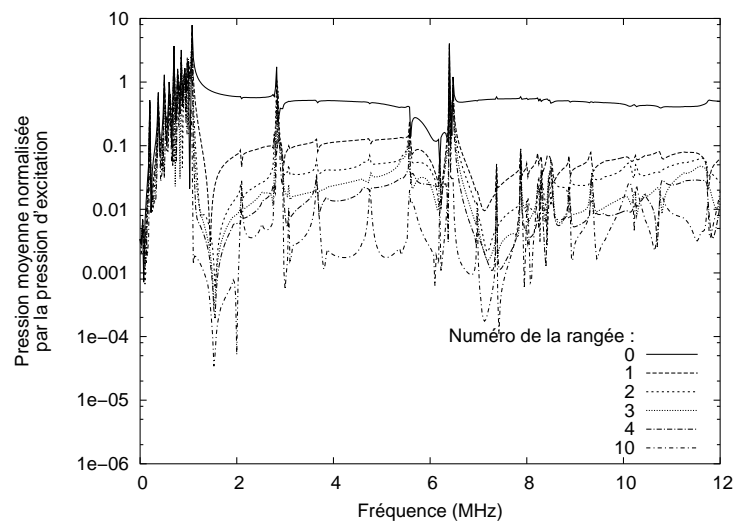


FIG. 8.11 – Amplitude des pressions mutuelles à l'interface membranes-fluide calculées pour plusieurs rangées du réseau. La rangée 0 est la rangée excitée. La pression est normalisée par la densité de force de l'excitation.

8.3.4 Carte complète des modes

Au cours de l'analyse du comportement des transducteurs micro-usinés, nous avons toujours considéré un fonctionnement 1D, dans le sens où le dispositif global est un réseau linéaire d'antennes élémentaires, elles-mêmes composées de réseaux bidimensionnels de transducteurs micro-usinés. Concrètement, cela s'est traduit par fixer la valeur du paramètre d'excitation γ_2 à zéro.

Comme on l'a fait pour le composite 1-3, on donne maintenant les profils de vitesse moyenne sur le contour de la première zone de Brillouin réduite grâce aux symétries des structures. On considère non seulement le réseau carré précédent, mais aussi un réseau hexagonal avec des membranes identiques. Les résultats sont reportés sur la figure 8.13. On rappelle le lien entre réseaux directs et réseaux réciproques sur la figure 8.12. Finalement, on donne la *carte* de la pression moyenne pour le réseau hexagonal sur la figure 8.14.

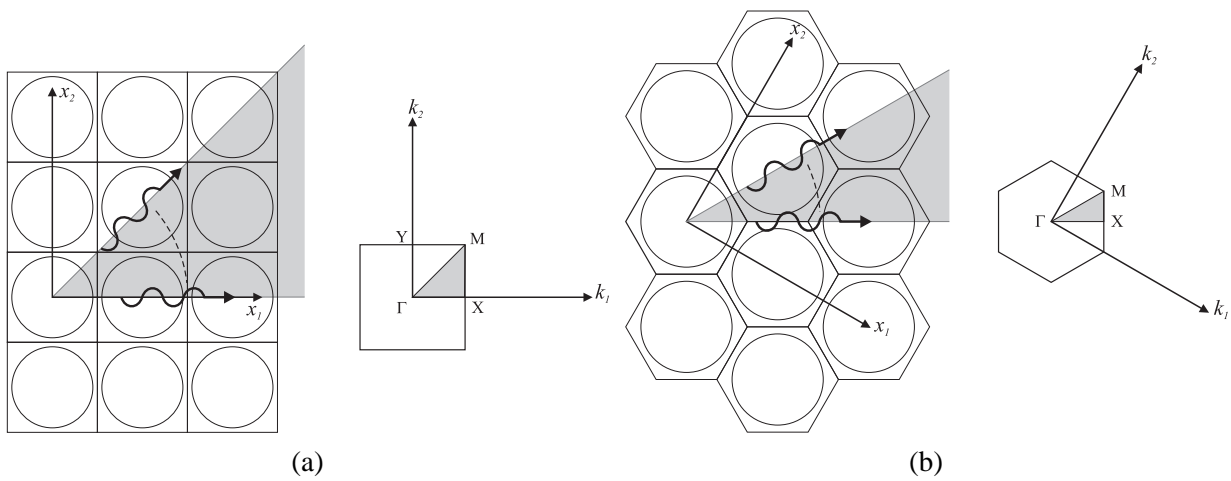


FIG. 8.12 – Identification du vecteur d'onde normalisé dans la première zone de Brillouin et direction de propagation correspondante des ondes dans l'espace réel pour le réseau de membranes (a) carré, (b) hexagonal. Si le vecteur d'onde n'appartient pas à la première zone de Brillouin, alors il peut s'écrire suivant (C.3) et le sens de propagation de l'onde associée peut changer.

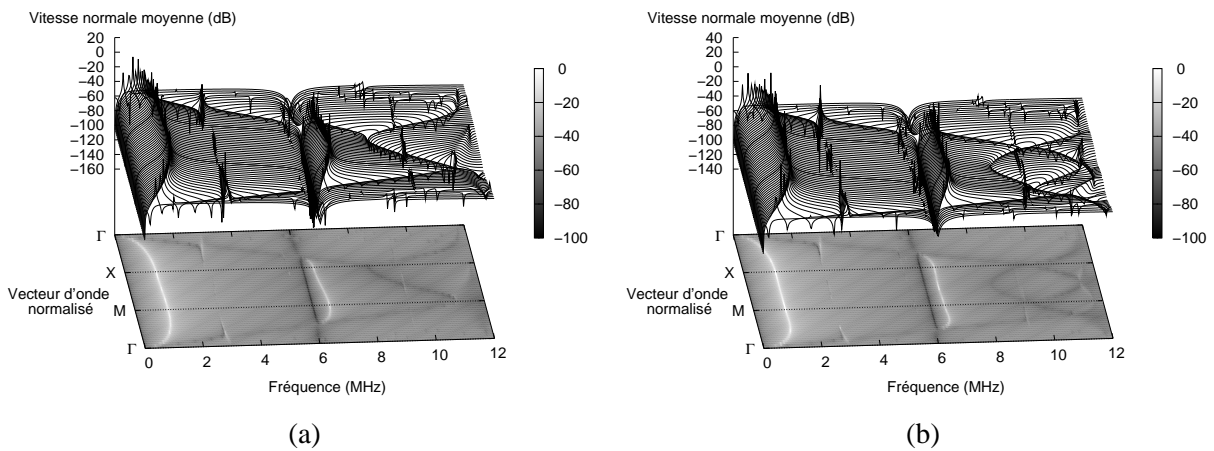


FIG. 8.13 – Vitesse moyenne harmonique dans la première zone de Brillouin pour un réseau de transducteurs micro-usinés (a) carré, (b) hexagonal.

Globalement, on reconnaît les contributions déjà décrites confinées dans leurs gammes de fréquence respectives. A cause de la limite de rayonnement située à des fréquences supérieures, le second mode de

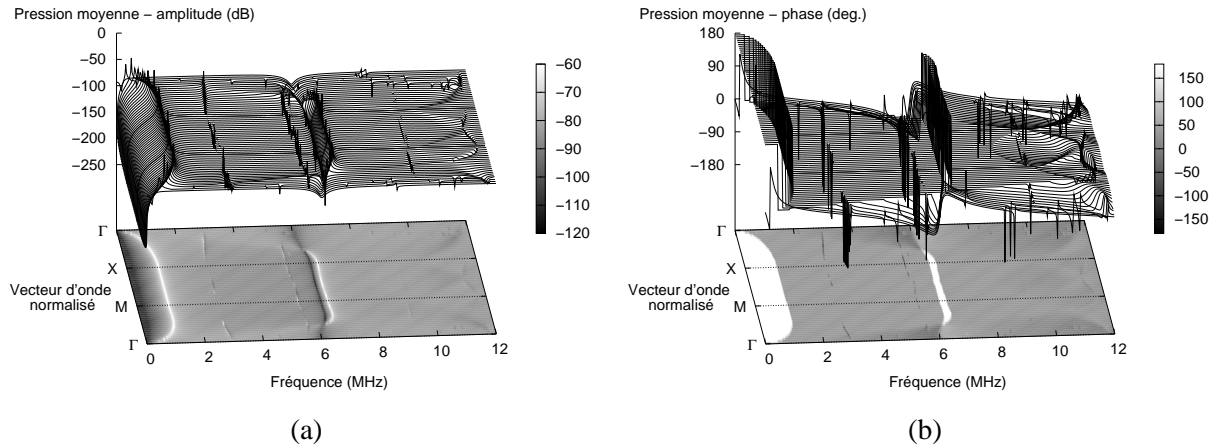


FIG. 8.14 – Pression moyenne harmonique en amplitude relative (a) et en phase (b) pour le réseau hexagonal.

flexion est résonant sur le chemin $X - M$. En changeant la période de l'excitation du réseau (plusieurs cellules par période ou modification des paramètres géométriques), on abaisse cette limite.

Pour un mode parasite donné, on peut imaginer profiter de l'effet de bandes d'arrêt de telles structures, par exemple en intercalant entre chaque pixel (chaque antenne élémentaire) un réseau de membranes de tailles légèrement différentes qui empêche le mode parasite de se propager et donc d'exister.

8.4 Vers d'autres domaines d'applications

L'étude des sondes ultrasonores pour l'imagerie médicale et le contrôle non-destructif nous a conduit à nous intéresser aux transducteurs micro-usinés sur silicium pour les raisons évoquées en introduction de ce chapitre. Dans ce contexte, l'analyse que nous avons menée par le biais de notre approche nous a fourni les causes potentielles des effets de diaphonie susceptibles d'apparaître dans les réseaux de phases, en nous permettant de comprendre le fonctionnement global de tels réseaux.

Si certaines vibrations sont considérées comme des modes parasites pour notre application de départ, elles ne le sont pas forcément dans d'autres contextes. Il est alors légitime d'envisager d'autres types d'applications à la lumière de nos résultats d'analyse.

On a évoqué en préambule des applications dans le domaine de la microfluidique [86], notamment la possibilité d'engendrer et de détecter des ondes d'interface dont la vitesse change avec la composition du fluide. On peut aussi intégrer des réseaux de MUTs dans les microsystèmes pour la fluidique afin de réaliser différentes fonctions comme le déplacement (toujours avec la même onde d'interface) ou le mélange de particules dans des micro-canaux.

D'autre part, on a montré que, en introduisant une différence de phase entre deux rangées de transducteurs, on est capable d'engendrer un mode de flexion fondamentale résonant qui ne rayonne pas dans le fluide. On imagine alors utiliser la sensibilité de la fréquence de ce mode aux conditions extérieures pour des applications capteurs en milieu fluide, notamment : mesure de viscosité, détection de protéines par fonctionnalisation de la surface.

Plus généralement, la même structure pourrait permettre de réaliser plusieurs fonctions au sein d'un même dispositif et d'améliorer le niveau d'intégration de tels systèmes.

Quatrième partie

Investigation de nouvelles techniques d'usinage des céramiques piézoélectriques

Introduction

On a vu précédemment que l'un des grands avantages du composite vient de sa nature périodique et de l'existence de bandes d'arrêt. Tout l'intérêt de ces bandes d'arrêt tient en ce que le mode d'épaisseur se situe dans l'une d'elle, pour peu que l'on fasse attention à la géométrie et aux proportions du réseau. C'est ce qui permet d'avoir un mode d'épaisseur bien découplé des autres modes de la structure. On peut alors imaginer que certaines géométries puissent donner des matériaux composites présentant des structures de bandes avantageuses. Toutefois, la seule géométrie accessible industriellement est le composite 1-3 standard, dont la cellule élémentaire est rectangulaire avec des plots de section également rectangulaire, obtenu par découpe à la scie diamantée (voir section 2.4.2).

Pour pouvoir envisager de nouvelles géométries, il est aussi nécessaire de disposer d'outils de fabrication appropriés, sans quoi ces "belles" géométries resteront à l'état de pure théorie. Ces nouvelles techniques doivent être de préférence collectives, industrialisables et bas-coûts afin de pouvoir être attractives par rapport à la technique classique de découpe à la scie.

Au cours de ces travaux, nous avons envisagé et testé deux techniques d'usinage en collaboration avec deux partenaires. La première est l'*usinage abrasif par ultrasons*, développée au Laboratoire de Chronométrie, Electronique et Piézoélectricité de l'ENSM à Besançon [89] par J.-J. Boy et E. Andrey. La deuxième est une technique de *micro-sablage* développée à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne [90] par M. Gijs et A. Sayah.

Nous nous bornerons dans cette partie à donner les grandes lignes de chacune de ces deux techniques et les résultats obtenus sur du PZT massif.

Chapitre 9

Micro-sablage

Le procédé de micro-sablage que nous avons utilisé est dérivé d'une technique d'usinage d'abord dédiée à la fabrication d'écrans vidéo de grande dimension [91, 92]. Il a ensuite été proposé comme une méthode d'usinage mécanique simple et rapide pour la fabrication de microsystèmes dans des matériaux fragiles et cassants. Le micro-usinage de structures complexes dans du verre a déjà été démontré [90, 93].

De même que pour l'usinage abrasif par ultrasons présenté au chapitre suivant, le mécanisme d'usinage repose sur un enlèvement de matière dû à la création de micro-fissures par des particules abrasives. L'approche consiste à usiner le matériau au moyen d'une projection de particules abrasives au travers d'un masque représentant la forme du motif que l'on veut transférer sur le substrat. Les zones protégées par le masque restent une fois le procédé achevé.

9.1 Appareillage

La poudre abrasive est composée de particules d'alumine (Al_2O_3) de $30\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre. Elle est projetée au moyen d'une buse par un jet d'air. La buse est montée sur un support en arc de cercle de telle sorte que l'angle d'incidence entre le faisceau de particules et la surface de la cible puisse être facilement changé, comme indiqué sur la figure 9.1. La distance entre la sortie de la buse et le substrat peut varier entre 1 cm et 9 cm. Le substrat peut être uniformément exposé au faisceau de particules par l'utilisation de tables de translation x et y pour le substrat et la buse respectivement. Dans un autre mode de fonctionnement, le substrat est placé sur une table rotative et la buse se déplace suivant l'axe y , afin d'obtenir une meilleure uniformité d'usinage.

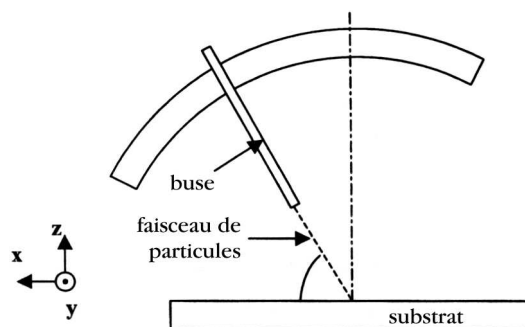


FIG. 9.1 – Représentation schématique de l'appareil de micro-sablage.

9.2 Résultats

9.2.1 Premiers essais : masque métallique

Pour les premiers tests, nous avons utilisé un masque métallique usiné dans un alliage à base d'acier. La taille des grains de $30\text{ }\mu\text{m}$ impose en pratique une ouverture minimum dans le masque de $60\text{ }\mu\text{m}$ (environ deux fois la taille du grain) pour que l'usinage soit efficace, c'est-à-dire pour qu'un grain puisse passer facilement par l'ouverture.

Des réseaux linéaires et bidimensionnels ont été usinés dans une plaque de PZT de $500\text{ }\mu\text{m}$. Ils sont présentés sur la photo 9.2.

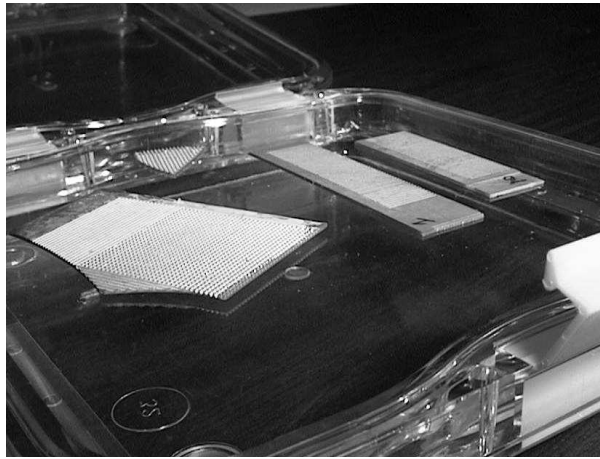


FIG. 9.2 – Réseaux 1D et 2D obtenues par micro-sablage avec un masque métallique.

Après quelques minutes d'usinage, on a obtenu pour les réseaux linéaires des rainures de $250\text{ }\mu\text{m}$ de profondeur pour des périodes de $500\text{ }\mu\text{m}$ et $600\text{ }\mu\text{m}$ respectivement. Le réseau bidimensionnel présente une période de $600\text{ }\mu\text{m}$. Le masque métallique correspondant consiste simplement en une plaque dans laquelle on a usiné un ensemble de lignes. Pour obtenir le réseau bidimensionnel, le masque a été tourné de 90° avant d'effectuer une deuxième passe. La figure 9.3 présente des vues du réseau bidimensionnel obtenues au MEB. Les flancs ne sont pas verticaux et le fond des rainures présente un profil en forme de cuvette.

Enfin, une plaque de PZT a été collée sur un matériau absorbant (au sens de l'acoustique) et usinée sur toute son épaisseur, donnant la structure présentée sur la figure 9.4. Le résultat final est un réseau de pyramides tronquées. Comme on l'a vu pour les premières structures, les flancs ne sont pas verticaux. Toutefois, ce test démontre la possibilité d'usiner une plaque de PZT sur toute son épaisseur. De plus, le support n'est pas usiné et agit comme une couche d'arrêt. Cela n'a rien d'étonnant puisque ce type d'usinage est destiné aux matériaux durs, cassants ou fragiles alors que le matériau absorbant est une résine. Néanmoins, ces premiers essais démontrent la pertinence de ce type d'usinage pour une céramique piézoélectrique telle que le PZT.

9.2.2 masque in-situ en PDMS

Avec un masque métallique, il s'avère impossible de réaliser des structures complexes comme par exemple un réseau de cylindres de PZT organisés en quinconce. La solution pour pallier ce problème est de déposer un masque in-situ à même la surface du substrat. Différents matériaux ont été testés à l'EPFL, montrant qu'un matériau approprié est l'élastomère de silicone (ou PDMS). L'élastomère utilisé pour nos tests a pour référence Sylgard 184. Le PDMS peut être rendu photosensible en vue de faire une photolithographie

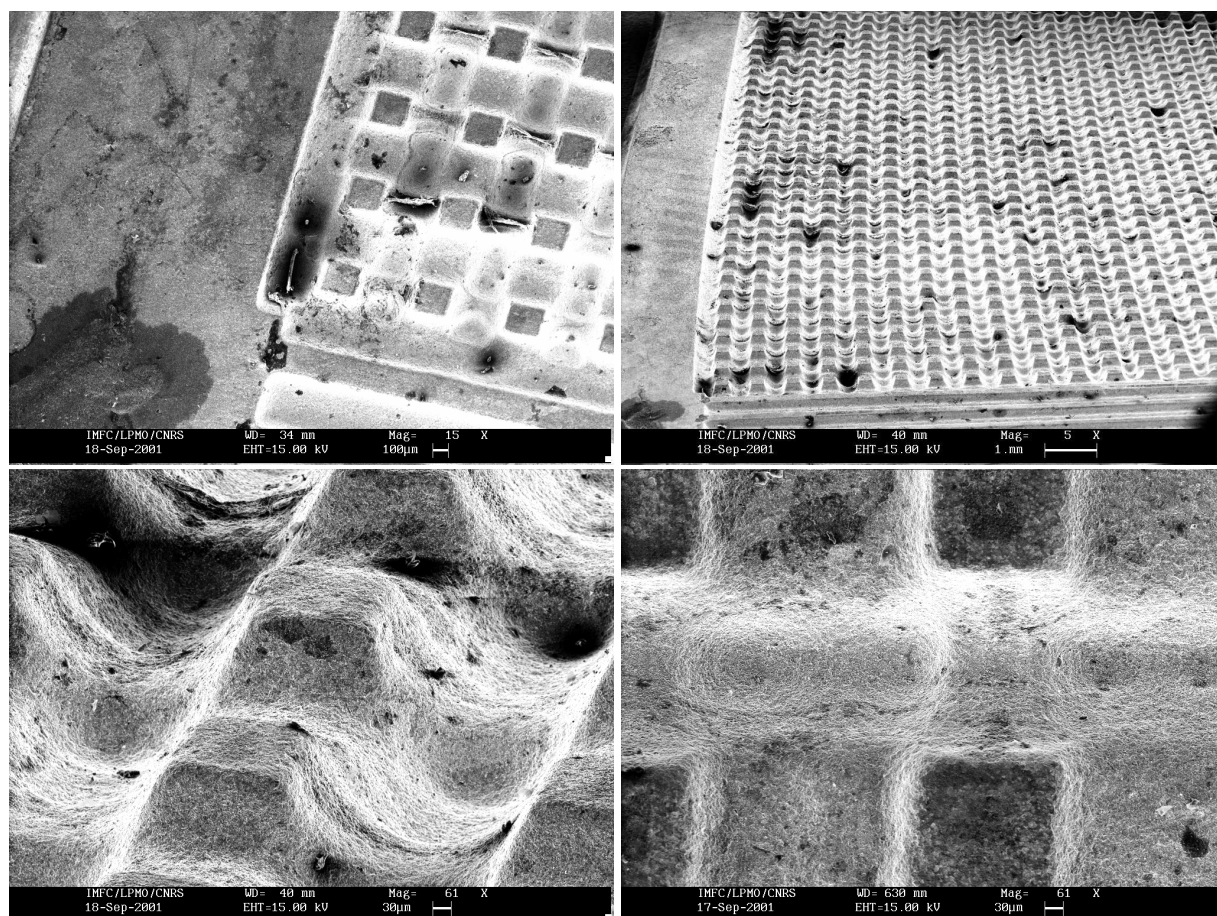


FIG. 9.3 – Vues au MEB du réseau 2D.

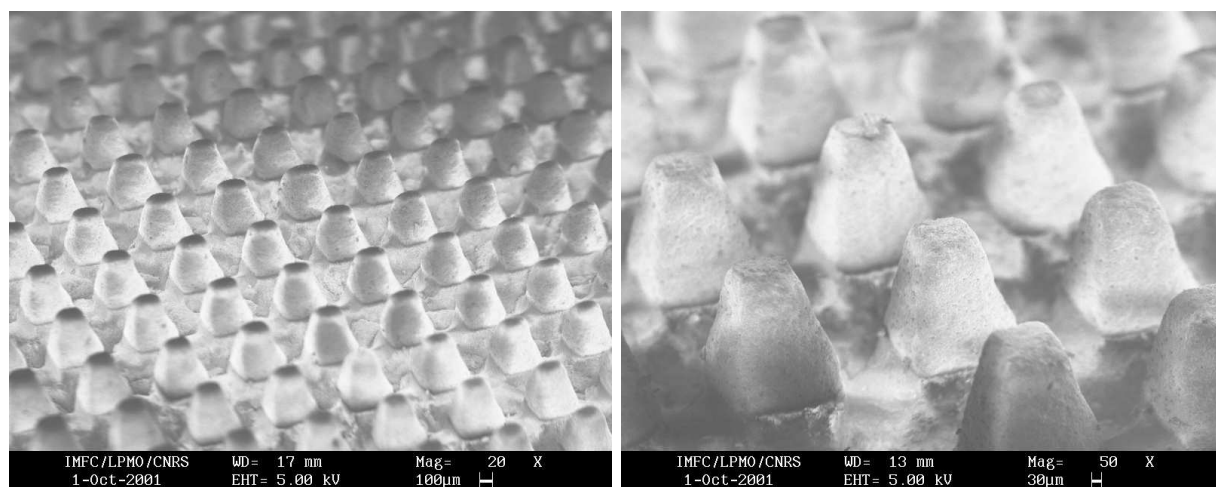


FIG. 9.4 – Vues au MEB du réseau obtenu avec une plaque de PZT collée sur un support.

afin d'obtenir le motif désiré. Toutefois, la résolution n'est pas aussi bonne qu'une résine photosensible dédiée aux procédés de photolithographie de salle blanche. On a préféré une autre alternative qui est de fabriquer un moule à même le substrat et représentant la contreforme du motif désiré. Ce moule est obtenu par un procédé de photolithographie de résine épaisse, procédé connu sous le nom de LIGA-UV. Un moule en résine épaisse – ici de la SU-8 – est ainsi fabriqué à la surface de la plaque de PZT. Le PDMS est ensuite déposé par enduction par-dessus le moule.

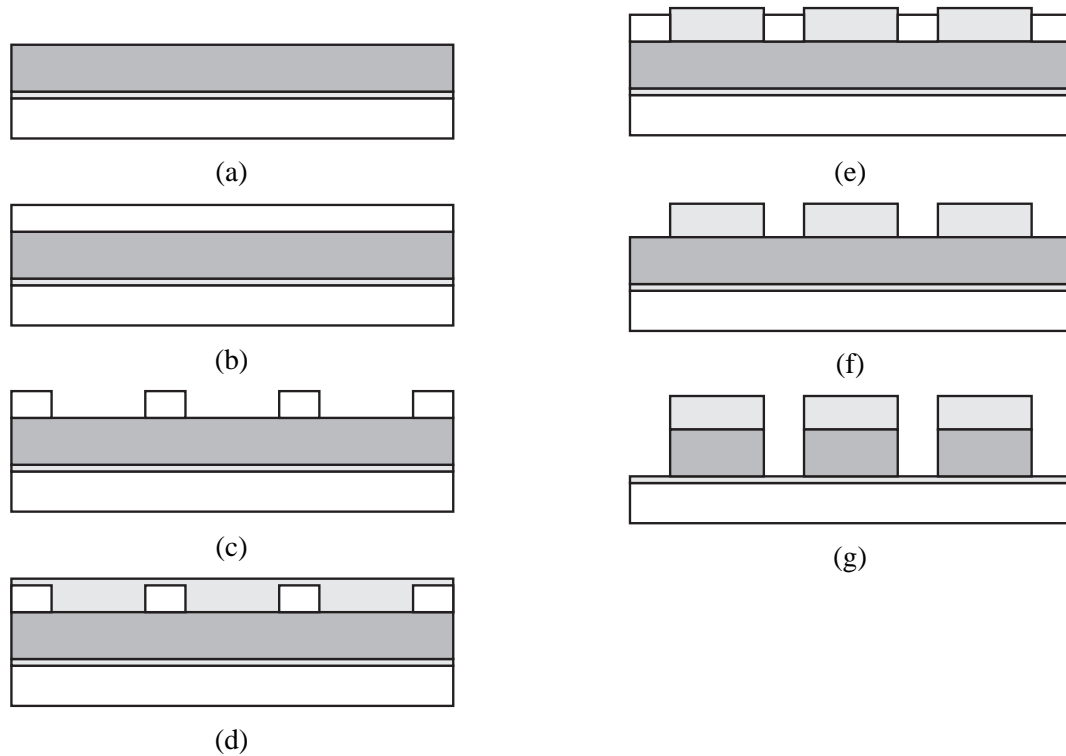


FIG. 9.5 – Étapes de l'usinage avec un masque en élastomère de silicone moulé. (a) Le PZT (gris foncé) est collé sur un support. (b) et (c) Création du moule de SU-8 par un procédé de lithographie (LIGA-UV). (d) Moulage du masque en élastomère de silicone. (e), (f) et (g) Micro-sablage proprement dit.

La figure 9.5 présente les étapes de l'usinage. La fine couche d'élastomère, qui persiste au-dessus des motifs de SU-8 quand on fait le moulage, est enlevée par les premières particules projetées (figure 9.5(e)). Ensuite le moule de SU-8 est usiné à son tour (figure 9.5(f)) alors que le masque d'élastomère reste en place, exposant ainsi les zones désirées de la plaque de PZT.

Usinage à incidence normale

Le premier échantillon est une plaque PZT de $500\ \mu\text{m}$ d'épaisseur collée sur un matériau absorbant avec une résine époxy électroconductrice. Le faisceau de poudre abrasive est orienté à incidence normale par rapport à la surface du substrat. Comme on le voit sur les photos de la figure 9.6, les plots, séparés les uns des autres, ont tendance à se décoller. Il s'avère que la colle n'est pas sèche partout. En effet, coller deux substrats pleine plaque ne permet pas à la colle d'être en contact avec l'air et au solvant contenu dans la résine de s'évaporer.

Néanmoins, le masque en élastomère de silicone résiste bien à la projection des particules abrasives et remplit correctement son rôle. A incidence normale du jet, on obtient des plots en forme de bouteilles. Le diamètre en haut des plots (au niveau du masque) est de $250\ \mu\text{m}$ pour une distance centre-à-centre de $500\ \mu\text{m}$.

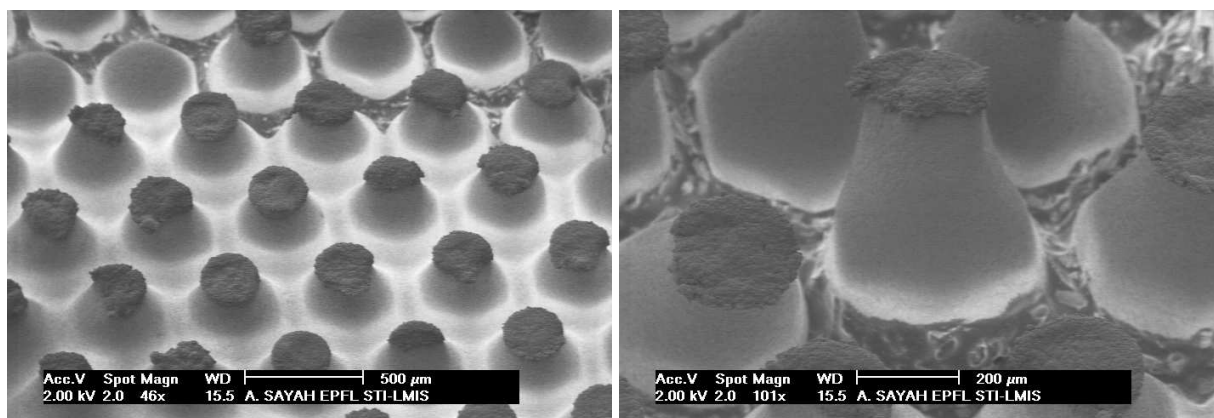


FIG. 9.6 – Vues au MEB du réseau obtenu avec une incidence normale du faisceau.

Même si ces résultats ne sont pas tout-à-fait ceux attendus (flancs verticaux), ils n'en restent pas moins intéressants. Des piézocomposites construits sur la base de ce type de plots sont susceptibles de présenter une impédance acoustique qui varie avec l'épaisseur, autrement dit une amplification naturelle du déplacement d'une face du composite, accompagnée d'une diminution de l'impédance acoustique de cette face. Cela revient à émettre plus de puissance dans le milieu (moins d'énergie perdue dans l'absorbant) et à élargir la bande passante grâce à une adaptation d'impédance plus aisée. Cette propriété est particulièrement intéressante pour les applications médicales, et les applications de contrôle non-destructif en immersion.

Usinage à incidence oblique

L'objectif est ici d'obtenir une bonne conservation de la forme des cylindres de PZT sur toute l'épaisseur. Une plaque de 1 mm d'épaisseur est usinée suivant le deuxième procédé évoqué auparavant, c'est-à-dire avec une incidence oblique du faisceau de particules et une rotation du porte-substrat. Le résultat présenté sur la figure 9.7 se caractérise par une sous-gravure de la plaque (gravure sous le masque) et par des flancs presque verticaux. Des réseaux carrés et hexagonaux ont été obtenus avec cette méthode avec un facteur de forme de l'ordre de quatre pour les plots. La figure 9.8 illustre le profil obtenu avec ce type d'usinage.

Ces premiers résultats d'usinage à incidence oblique sont encourageants pour de futures avancées du procédé, notamment l'utilisation de grains de diamètre inférieur qui devrait permettre de structurer des motifs plus petits.

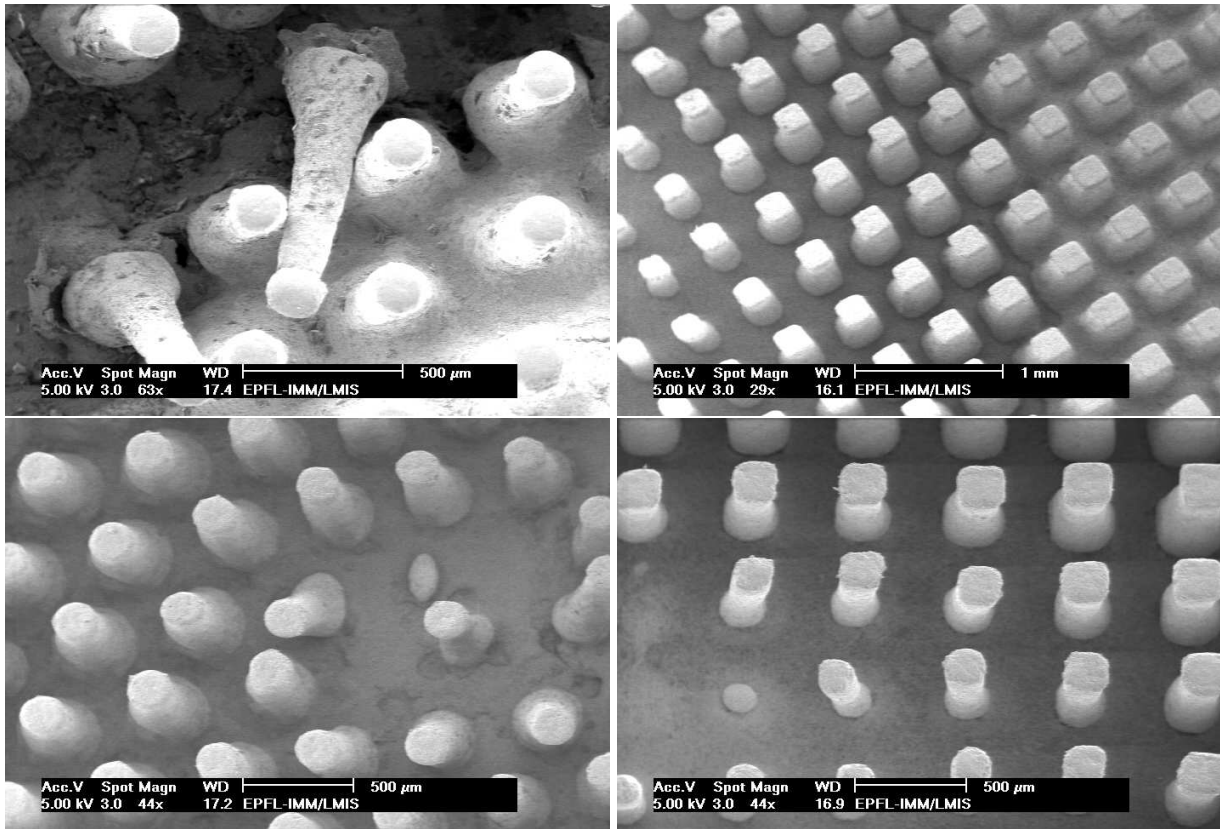


FIG. 9.7 – Vues au MEB du réseau obtenu avec une incidence oblique du faisceau.



FIG. 9.8 – Représentation schématique du profil obtenu avec un faisceau de particules oblique.

Chapitre 10

Usinage abrasif par ultrasons

10.1 Principe de l'appareil

Un outil, appelé *sonotrode* par analogie à l'*électrode* utilisée dans les techniques d'usinage par électro-érosion, reproduit sa propre forme dans la pièce à usiner par pénétration. La vibration de la sonotrode, excitée sur sa fréquence de résonance à l'aide d'un générateur de puissance, entraîne des grains d'abrasif (comme ceux utilisés pour le rodage) entre la pièce à usiner et la sonotrode. Les mouvements des grains sont à l'origine de l'usinage proprement dit. L'abrasif est en suspension dans de l'eau, qui transmet les ondes ultrasonores générées par la sonotrode autour de 20 kHz. La vibration de la sonotrode est elle-même assurée par un transducteur piézoélectrique. Ce dernier est en général composé d'un ou plusieurs disques de PZT précontraints. La variation d'épaisseur du transducteur est transmise à la sonotrode par l'intermédiaire d'un amplificateur mécanique de déplacements en titane – sans pour autant avoir une amplification d'énergie – liant rigidement le transducteur au bâti. L'amplification de mouvement est schématisée sur la figure 10.1.

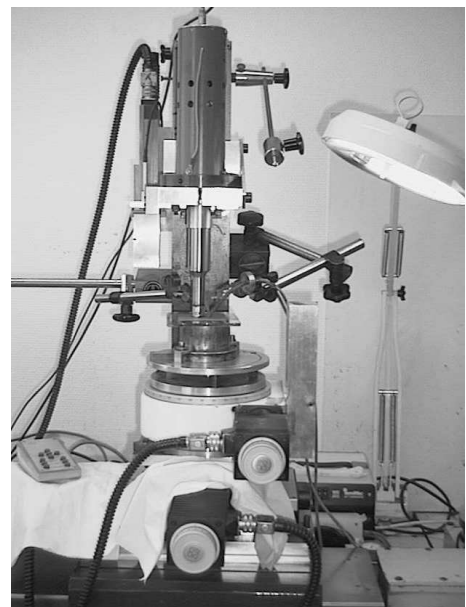
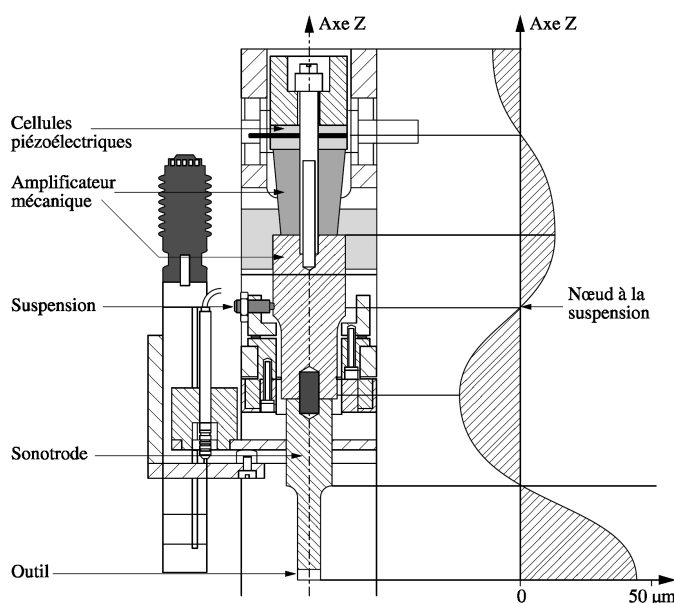


FIG. 10.1 – Répartition de l'amplitude du mouvement dans l'ensemble vibrant transducteur-amplificateurs (convertisseurs)-sonotrode, d'après [89], et photo de l'appareil.

La forme de la sonotrode elle-même permet d'obtenir une amplification d'amplitude longitudinale. La figure 10.2 montre diverses formes de sonotrodes. Suivant la forme de la sonotrode, le rapport de transfor-

mation R varie. Il est le plus important dans le premier cas, soit $R \approx (D/d)^2$ contre D/d dans le cas de la forme exponentielle. Les dimensions choisies pour la sonotrode bicylindrique sont : $D = 35$ mm et $d = 20$ mm, soit un rapport d'amplification autour de 3. Le matériau généralement utilisé pour la sonotrode est de l'acier doux.

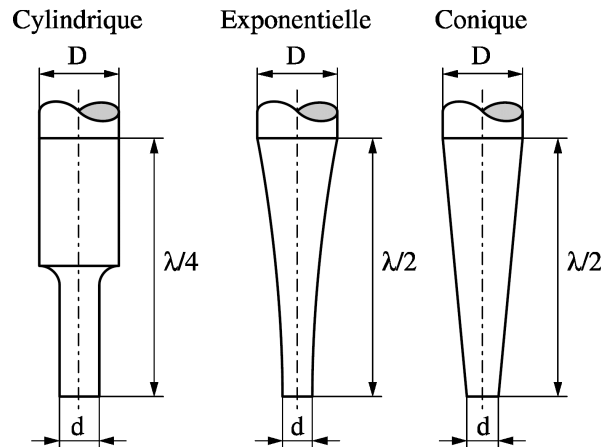


FIG. 10.2 – Diverses formes de sonotrodes. D'après [89].

Enfin, l'*outil* qualifie l'extrémité "utile" de la sonotrode, autrement dit la partie qui impose la forme de l'usinage. Elle peut être "rapportée" ultérieurement sur le corps de la sonotrode si la forme à réaliser est complexe. La fixation de l'outil sur la sonotrode s'effectue par vissage, soudure ou brasage. Notons que la fixation doit être très forte pour éviter que les vibrations ne désolidarisent l'embout de la sonotrode en cours d'usinage.

10.2 Principe physique

Si une particule très dure est projetée sur la surface d'une pièce, elle provoque une déformation de la pièce. Dans un premier temps, la déformation est élastique. Si la quantité d'énergie est suffisante, la limite élastique est dépassée et il peut même y avoir rupture. Des fissurations apparaissent alors dans la pièce. Il y a enlèvement de matière par formation de "microcopeaux".

Simultanément, le travail des grains abrasifs se traduit par une usure plus ou moins importante de la sonotrode et par celle des grains.

Ce procédé d'usinage dépend de nombreux paramètres tels que : fréquence et amplitude de vibration ; nature, dimension et concentration des grains d'abrasif ; profondeur de pénétration dans la pièce à usiner ; nature du fluide porteur et conditions de circulation en son sein en fonction de la géométrie de l'outil ; nature de l'outil ; nature de la pièce.

10.3 Résultats

10.3.1 Outils en acier doux

L'intérêt de l'acier doux est que l'outil ainsi utilisé possède une durée de vie tout-à-fait satisfaisante, surtout lorsque le matériau usiné est une céramique dure et cassante. La limite élastique de l'outil est alors supérieure à celle des matériaux à usiner.

Pour ces essais, nous nous sommes attachés à obtenir un réseau hexagonal de plots cylindriques, motif inaccessible par la technique classique de découpe à la scie. Un premier outil (figure 10.3(a)) a été fabriqué par usinage classique. Une plaque de PZT de 500 μm d'épaisseur a été usinée avec cet outil (figure 10.4). Les flancs des plots présentent de nombreux défauts, certainement dus à la qualité de l'outil. Leur diamètre est d'environ 500 μm . Après enduction et polissage, on obtient le composite de la figure 10.3(b).

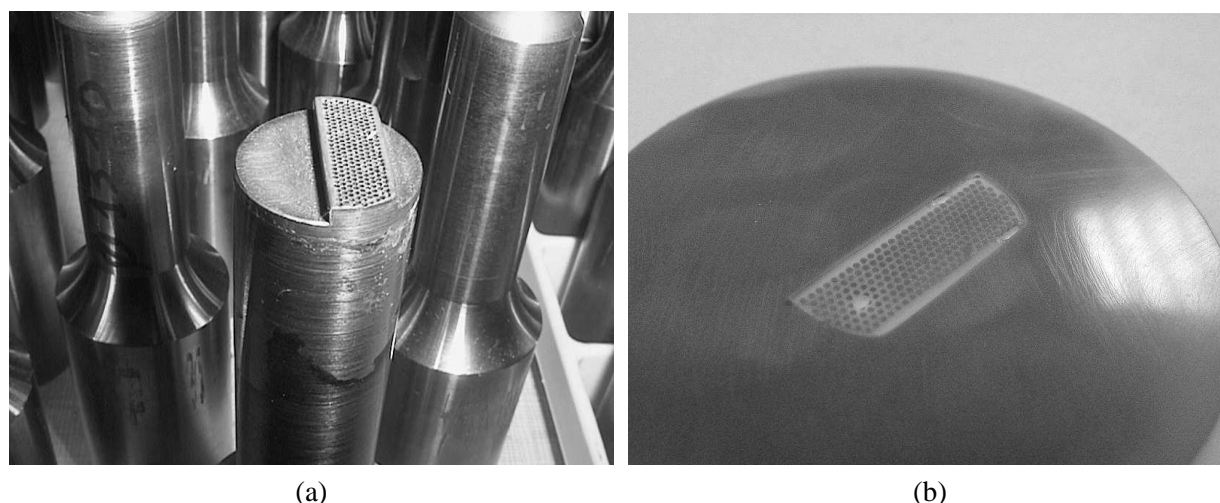


FIG. 10.3 – (a) Premier outil en acier doux, brasé sur la sonotrode proprement dite. (b) Premier composite obtenu avec cet outil.

Le composite obtenu a été caractérisé électriquement avec un analyseur d'impédance, et optiquement avec une sonde interférométrique hétérodyne [94, 95].

La conductance (figure 10.5(a)) présente notamment une résonance électrique importante autour de 3,6 MHz. Parallèlement, le déplacement normal (figure 10.5(b)), dans la plage résonance-antirésonance de ce mode, présente une forte atténuation. L'épaisseur du composite après le polissage est de l'ordre de 350 μm , ce qui induit une largeur des plots supérieure à la hauteur. On ne se trouve alors pas en présence d'un mode piston, mais en présence d'un mode radial, autrement dit les plots vibrent, non plus dans l'épaisseur, mais dans la largeur.

Une deuxième résonance est couplée à la première autour de 4 MHz, et on trouve optiquement un déplacement quasi-uniforme. Ce mode peut être le mode d'épaisseur qui a perdu son énergie au profit du mode radial.

La caractérisation optique fait apparaître une importante contribution autour de 4,7 MHz, qui correspond à une résonance électrique moindre. Une cartographie optique de ce mode (figure 10.5(c)) permet de l'identifier comme étant l'équivalent du premier mode latéral défini pour un composite 1-3 (réseau carré).

Un deuxième outil a été fabriqué en sous-traitance, toujours à l'aide de techniques d'usinage de mécanique classique. Il consiste en une pastille de 20 mm de diamètre, de 2 mm d'épaisseur, percée de part en part. Les perçages ont un diamètre de 350 μm .

Deux séries d'essais ont été menées et les résultats sont présentés sur les figures 10.6 et 10.7 respectivement.

Les plots obtenus ont un diamètre de l'ordre de 300 μm . Le principe de l'usinage induit un espace entre l'outil et la pièce usinée lié à la taille des grains utilisés. Cet espace nécessaire, entre les flancs verticaux des perçages de l'outil et ceux des plots usinés, explique la différence de diamètre des motifs de l'outil et de la pièce structurée.

Les résidus qui affleurent sur la face supérieure des plots viennent de la métallisation préalable des

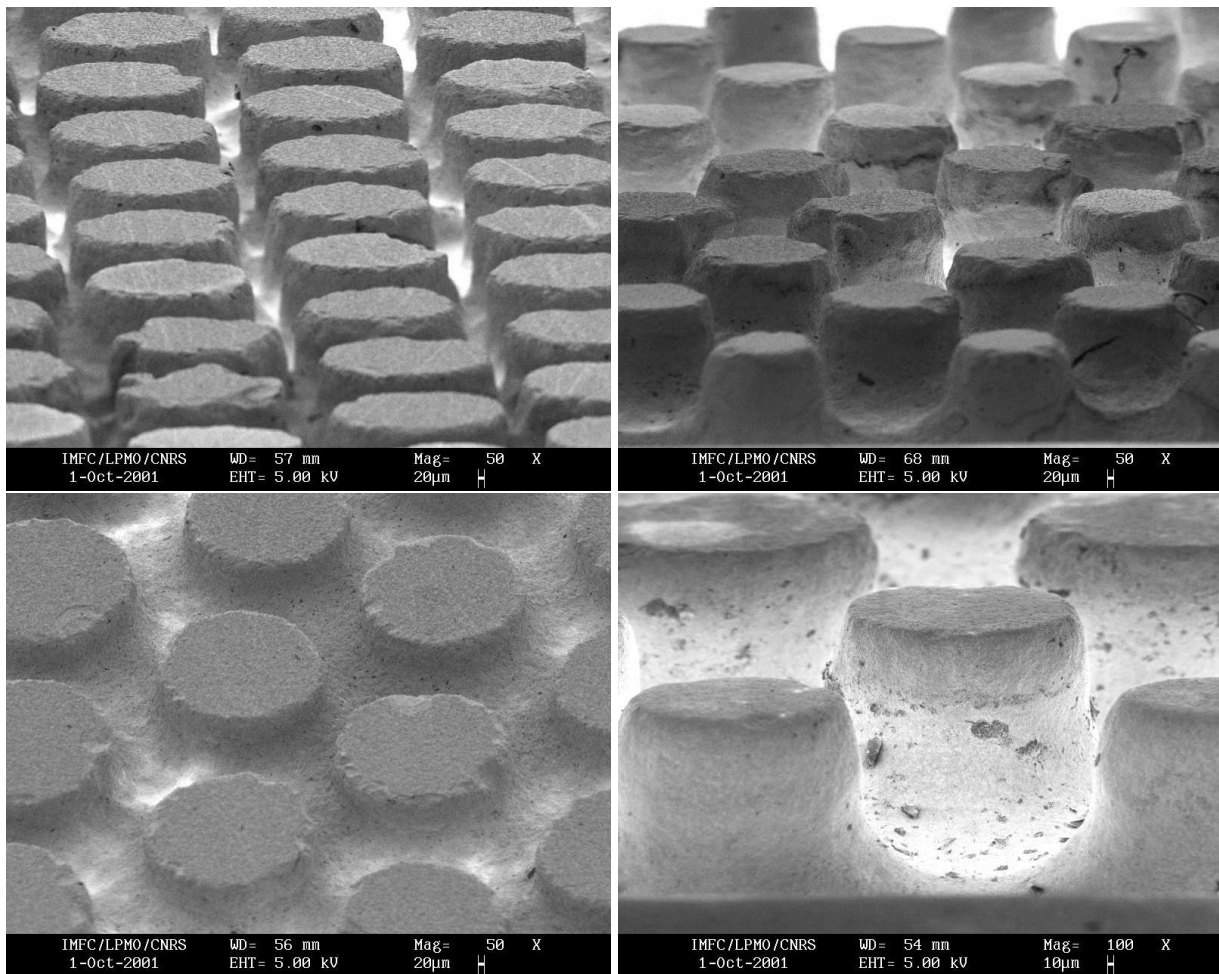


FIG. 10.4 – Photos MEB du réseau de plots de PZT obtenu avec le premier outil en acier doux. Le diamètre des plots est de l'ordre de $500\ \mu\text{m}$ pour une hauteur de l'ordre de $400\ \mu\text{m}$.

plaques de PZT massifs. D'autre part, si les plots présentent un défaut de conicité sur la partie supérieure, celui-ci devient très faible ensuite. Au cours de la deuxième série d'essais, une plaque de PZT d'épaisseur $1\ \text{mm}$ a été usinée sur $800\ \mu$ de profondeur. Le léger défaut de conicité de la première série paraît encore atténué, voire négligeable. Seule l'épaisseur de la plaque a limité la hauteur des plots et on peut espérer obtenir des facteurs de forme encore plus élevés.

A partir des structures de la deuxième série, on a fait réaliser par Framatome-ANP une enduction avec une résine epoxy puis un polissage double-face jusqu'à obtenir le composite final. La figure 10.8 fait apparaître le composite obtenu avant et après métallisation par pulvérisation cathodique.

La caractérisation électrique en conductance et résistance est donnée sur la figure 10.9(a). On trouve vers $2\ \text{MHz}$ le mode d'épaisseur puis le premier mode latéral, tel que défini précédemment pour un composite de réseau hexagonal, vers $3\ \text{MHz}$. La comparaison avec les résultats de simulation (voir figure 10.9(b)) montre une très bonne adéquation spectrale de la résistance. Les différences de fréquences sur la conductance et d'amplitudes d'une manière générale sont liées au couplage électromécanique effectif du composite, et donc aux constantes piézoélectriques du PZT. Le couplage de mode d'épaisseur est légèrement inférieur à celui attendu tandis que le premier mode latéral est plus couplé que prévu. Il sera nécessaire dans un premier temps d'observer l'influence d'une repolarisation du composite sur ces couplages.

Avec cette méthode, la limite de résolution vient de la taille des grains d'abrasif et de la fabrication de l'outil. Contrairement au sablage pour lequel la taille des grains est critique – un grain de taille réduite devra

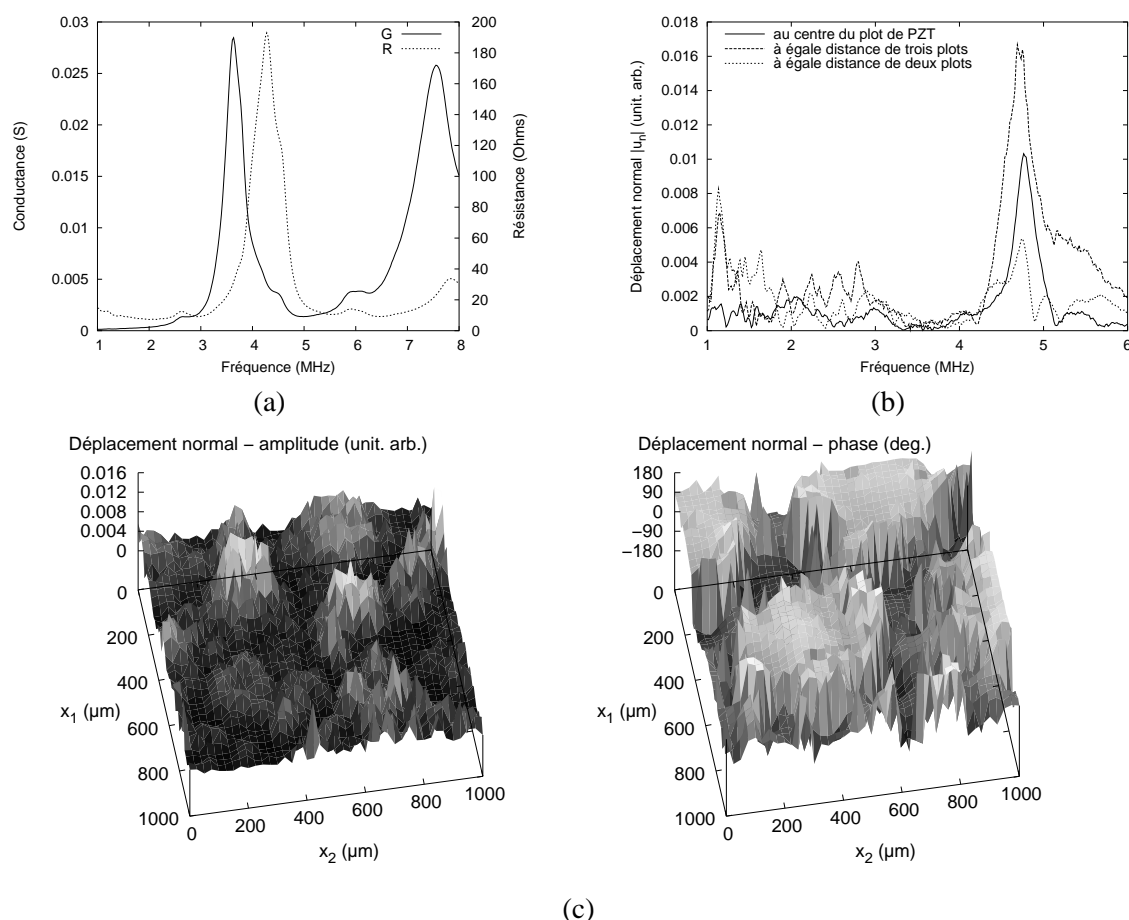


FIG. 10.5 – (a) Conductance et résistance du composite final après métallisation. (b) Déplacement normal du composite en trois points précis, obtenu à l'aide d'une sonde optique interférométrique hétérodyne. (c) Cartographie du déplacement normal à 4,7 MHz, en amplitude et phase.

être projeté avec une vitesse supérieure pour "porter" une énergie équivalente – elle l'est moins dans le cas de l'usinage ultrasonore au sens de l'efficacité et de la faisabilité, et on peut choisir des tailles de grains très petites ($< 10 \mu\text{m}$) pour la "finition".

Le problème de la fabrication d'outils en acier doux porte à se tourner vers des solutions alternatives d'usinage de celui-ci comme l'usinage par laser à vapeur de cuivre ou l'usinage par micro-électro-érosion [96].

10.3.2 Outils alternatifs, quelques pistes

Enfin, d'autres pistes ont été explorées pour la fabrication de l'outil, faisant appel à des procédés micro-techniques utilisés en salle blanche.

La première idée est de remplacer l'acier par du nickel que l'on peut électroformer. Pour ce faire, on fabrique un moule en résine épaisse photosensible (par exemple la résine SU-8) sur une surface conductrice, et on électroforme ensuite le nickel dans les espaces laissés libres. Un essai a été réalisé avec un masque existant. Un motif en nickel a été électroformé sur une pastille en acier qui sera brasée sur la sonotrode proprement dite.

La figure 10.10 présente une vue au MEB de l'outil avant et après usinage d'une plaque de PZT. Le résultat est présenté sur la figure 10.11. Le motif en nickel a effectivement été reporté dans le PZT. Toutefois, on peut distinguer deux zones, l'une bien usinée et l'autre dégradée (bas de la photo). Si on regarde de plus

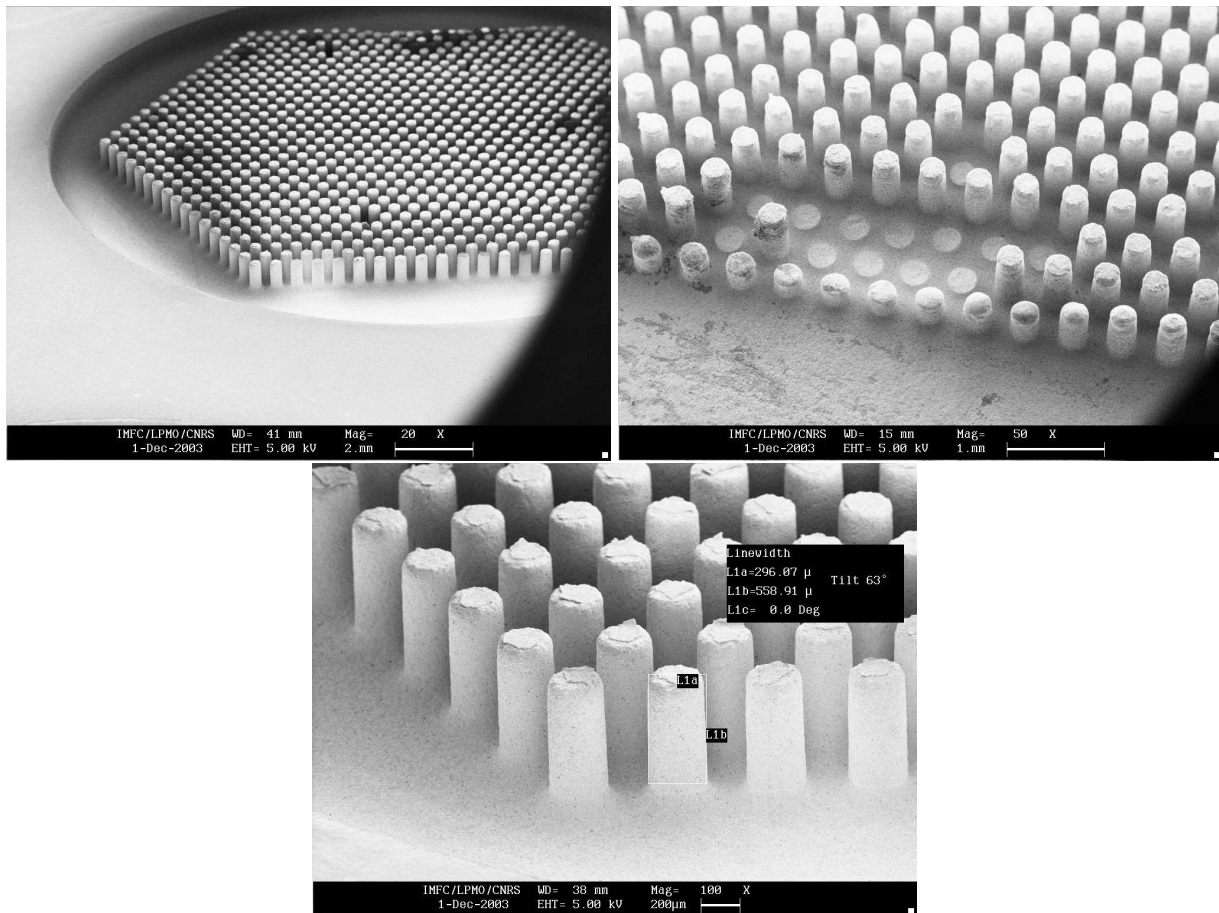


FIG. 10.6 – Photos MEB de structures issues de la première série d’essais avec le deuxième outil en acier. Les plots font $300\ \mu\text{m}$ de diamètre. Leur hauteur dépend de l’épaisseur de la plaque usinée. Les deux rangées de plots enlevés témoignent de la bonne conservation du motif à la base des plots.

près l’outil après usinage, on observe aussi deux zones, la première à droite de la photo bien conservée et la deuxième où l’outil a été dégradé. Deux agrandissements (figure 10.12) témoignent de ce phénomène que l’on n’explique pas pour le moment.

La deuxième idée est d’utiliser directement un outil en résine obtenu par le même procédé que le moule précédent. Un premier test a révélé la possibilité de reporter le motif dans du PZT. Le choix du support, qui d’une part devra être fixé au corps de la sonotrode, et sur lequel d’autre part la résine doit suffisamment adhérer, est un point critique de la méthode.

Le choix de ces techniques a été motivé par la simplicité tout au moins théorique qu’elles apportent dans la réalisation d’outils aux motifs complexes et très petits. Une fois le masque créé pour un motif donné, le coût est celui de la mise en forme de la résine, autrement dit du procédé de photolithographie, et on peut imaginer réaliser des outils en résine ”jetables”.

Quelle que soit l’alternative, l’étude n’en est qu’à ses balbutiements. Si le report de motifs s’est révélé possible, il est encore nécessaire d’affiner le procédé et de prouver la faisabilité d’outils adaptés à notre application (outils à haut facteur de forme). Dans ce cas, il faut encore s’assurer que l’outil possède une durée de vie suffisante pour l’usinage d’une pièce.

On mettra donc en balance des outils en acier doux, durables, usinés par des techniques plus lourdes et plus longues (micromécanique ”horlogère”, usinage laser, micro-électro-érosion, etc.), et des outils ”jetables” fabriqués par le biais des microtechniques qui ont l’avantage d’être collectives.

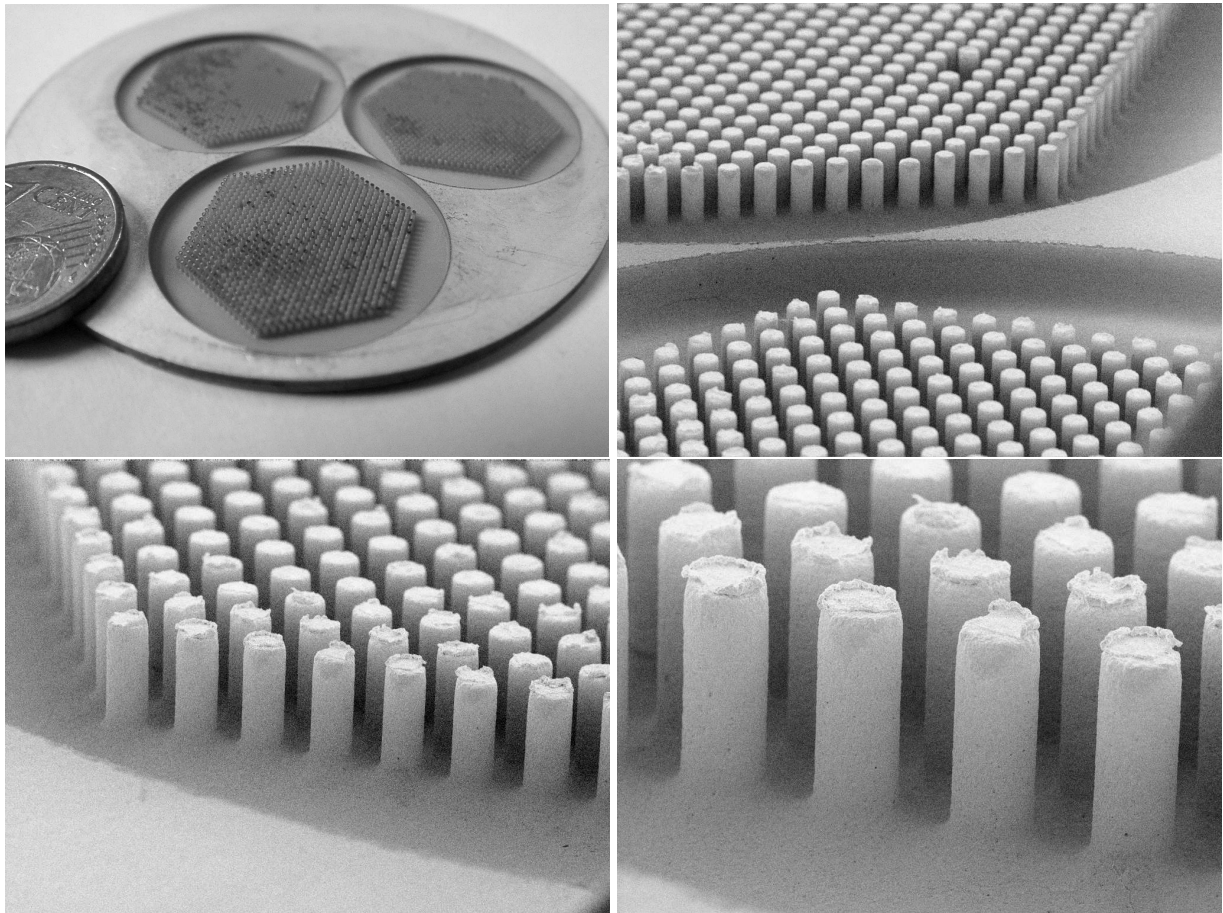


FIG. 10.7 – Photos MEB de structures issues de la deuxième série d’essais avec le deuxième outil en acier. Le diamètre des plots est le même que pour la première série. La hauteur est ici d’environ $800\ \mu\text{m}$ pour une plaque de $1\ \text{mm}$ d’épais.

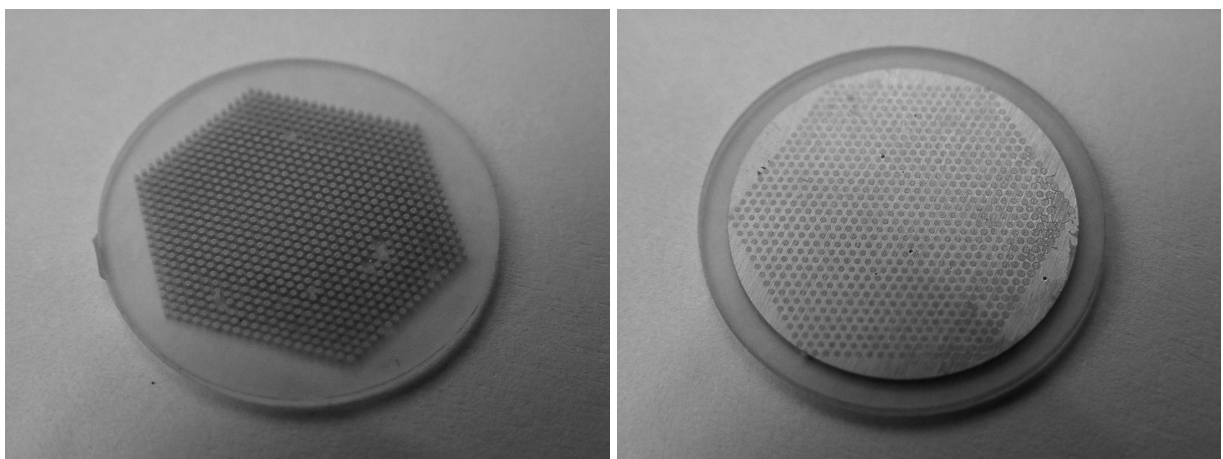


FIG. 10.8 – Composite final obtenu avec la deuxième série d’usinage. Diamètre des plots : $300\ \mu\text{m}$, hauteur finale après polissage : $700\ \mu\text{m}$, distance centre à centre : $500\ \mu\text{m}$.

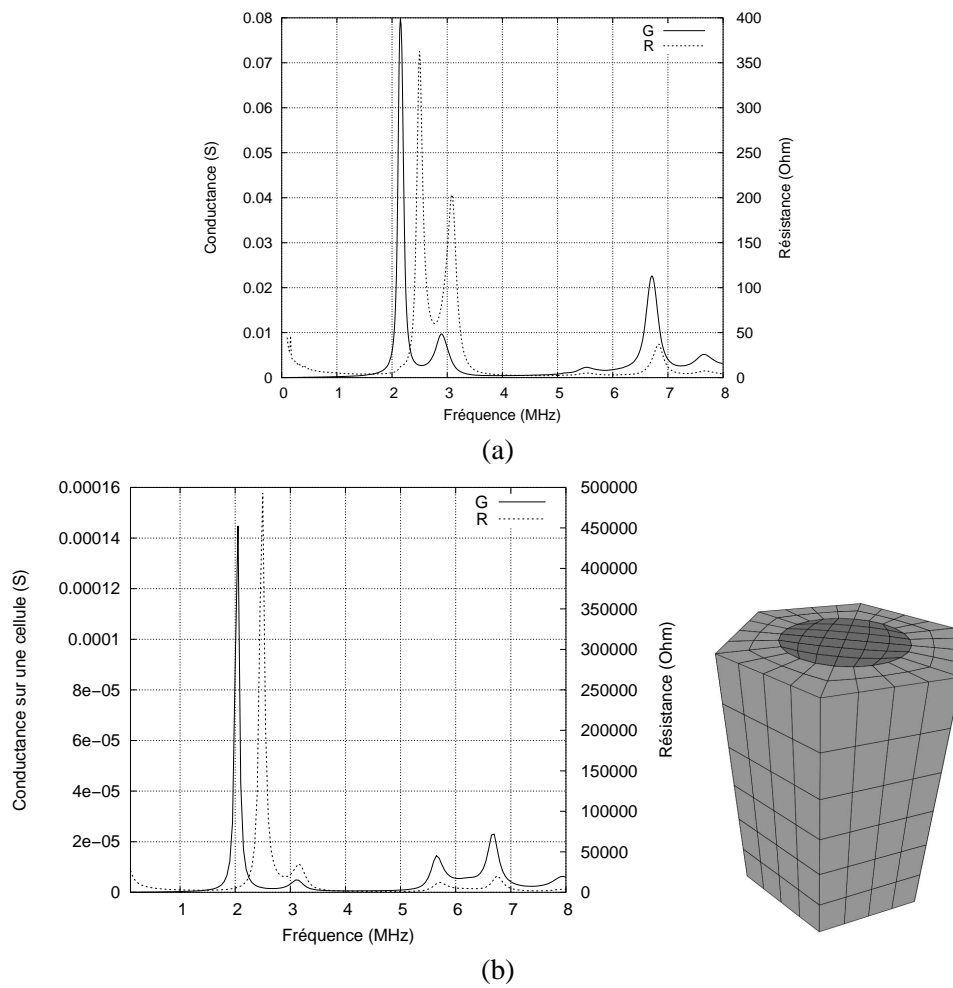


FIG. 10.9 – (a) Caractérisation électrique du composite obtenu. (b) Simulation du même composite par éléments finis. Le maillage est représenté.

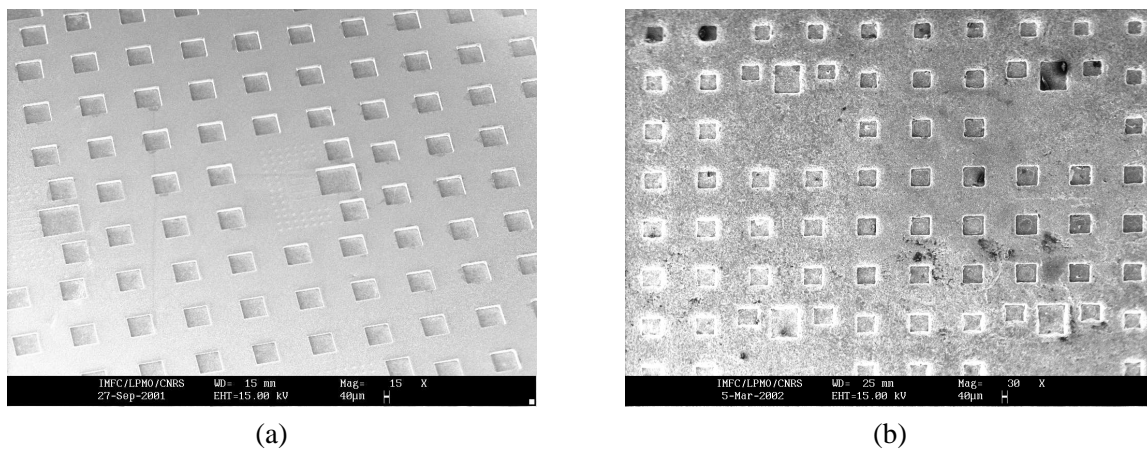


FIG. 10.10 – Vues au MEB de l'outil en nickel électroformé (a) avant usinage (b) après usinage.

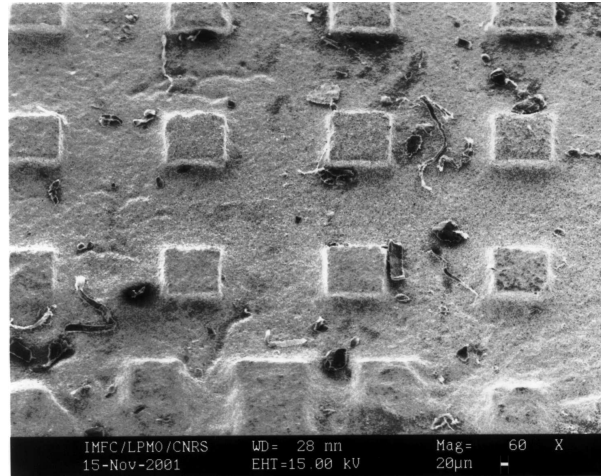
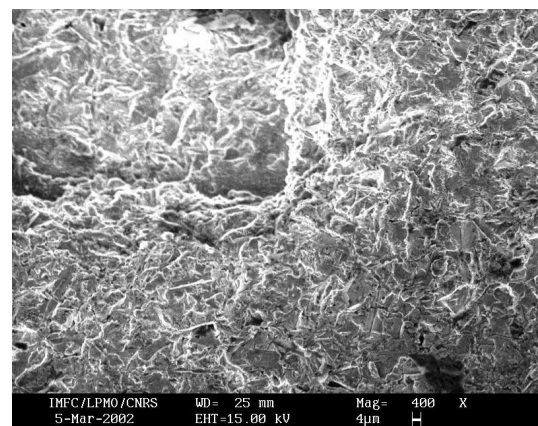


FIG. 10.11 – Motif reporté dans du PZT.



(a)



(b)

FIG. 10.12 – Vues au MEB de l'outil en nickel électroformé après usinage (a) zone bien conservée (b) zone dégradée.

Conclusions et perspectives

Les travaux produits au cours de cette thèse s'inscrivent dans le cadre de l'imagerie acoustique médicale et du contrôle non-destructif (CND). Les sondes ultrasonores sont appelées à évoluer avec pour objectif la réalisation d'images tridimensionnelles. Dans cette optique, le besoin de concevoir des sondes avec un degré d'intégration élevé et un nombre croissant d'antennes élémentaires se fait de plus en plus pressant. C'est dans ce contexte que nous avons développé une approche spécifique dédiée aux structures périodiques, avec en point de mire la simulation de structures composites piézoélectriques bipériodiques, couramment mises en œuvre dans les sondes ultrasonores modernes.

Les transducteurs piézocomposites présentent en effet plusieurs avantages dont l'un, et non le moindre, est l'élargissement de la bande passante des transducteurs grâce à une impédance acoustique plus faible que celle des céramiques massives. La bande passante est en effet déterminante en termes de résolution axiale, autrement dit dans la capacité d'une sonde à distinguer les détails. De plus, les composites, en tant que structures périodiques composées de plusieurs matériaux, présentent des propriétés similaires à celles des cristaux phononiques, transposition des cristaux photoniques à l'élasticité. L'une d'elles est l'existence de bandes d'arrêt, bandes de fréquences dans lesquelles aucune onde (au moins pour une polarisation donnée) ne se propage. Cette propriété permet de découpler la vibration utile des vibrations parasites. L'optimisation des composites sera amenée à passer par une phase d'exploitation systématique des outils de simulation. Parallèlement, il est nécessaire, si l'on veut profiter réellement de l'optimisation des composites au travers de motifs non standards, de proposer des techniques de fabrication adaptées à ces nouvelles structures.

L'approche périodique est fondée sur la notion d'analyse harmonique, méthode issue du domaine des dispositifs à ondes de surface (DOS) que nous avons généralisée aux structures bipériodiques. L'analyse harmonique est naturellement associée au concept de grandeurs mutuelles, dont nous avons l'intérêt pour l'étude des effets de diaphonie au sein d'un réseau de transducteurs élémentaires. Ces grandeurs mutuelles permettent d'une part d'évaluer l'importance du couplage entre deux éléments d'un réseau, et d'autre part de tenir compte de n'importe quelle stratégie d'excitation dont on veut connaître la réponse. On a montré qu'il était ainsi possible de prévoir non seulement la réponse électrique effective de la sonde mais aussi le champ rayonné pour des conditions similaires aux modes opératoires usuels.

Dans l'optique de l'analyse harmonique, deux principes de modélisation ont été retenus et conformés à nos besoins. Le premier est fondé sur la méthode des éléments finis. L'approche périodique et harmonique permet de limiter le maillage (échantillonnage spatial de la structure étudiée) à un élément unique du réseau, sans perte de généralité, grâce aux conditions aux limites spécifiques que l'on applique aux frontières de la cellule, conformément aux travaux pionniers de Hladky *et al.* [27]. De plus, la volonté de simuler des structures dans leurs conditions réelles de fonctionnement nous a amenés à tenir compte des milieux de propagation en faces avant et arrière de ces structures, par une méthode mixte éléments finis/éléments de frontière (aussi dénommée par l'acronyme FEA/BEM). Nous avons développé cette formulation, non seule-

ment pour les géométries bidimensionnelles, mais aussi pour les structures tridimensionnelles, nous donnant pour la première fois la possibilité de considérer des sondes échographiques 2D. Une fois de plus, une notion a été empruntée au domaine des DOS, celle des fonctions de Green périodiques définies dans le domaine spectral (domaine des nombres d'onde), qui permettent de simuler le rayonnement de surfaces planes dans des structures stratifiées et composées de matériaux de toutes natures (dans la limite de l'élasticité).

La deuxième méthode retenue nous vient tout droit du domaine des cristaux phononiques et repose sur le développement en ondes planes des champs prenant place dans une structure composite. Elle permet une écriture unifiée des champs en séries dites de Bloch-Floquet, et de même une description unifiée des structures en séries de Fourier. Alors que cette méthode se limitait aux matériaux isotropes (ou peu s'en faut) et à des structures d'épaisseur infinie ou semi-infinie, nous avons utilisé la formulation Fahmy-Adler afin de généraliser le principe aux matériaux piézoélectriques. A ce stade, deux points de vue ont été considérés. L'un a consisté à étudier la propagation des ondes dans des composites bipériodiques d'épaisseur infinie, sans se limiter à propager les ondes dans le plan du réseau. Le deuxième aspect nous a conduit à aller au bout de la formulation Fahmy-Adler afin de simuler des composites d'épaisseur finie.

Quelle que soit la méthode employée, l'approche ne s'est pas bornée aux réseaux rectangulaires et a été élargie aux réseaux hexagonaux, dont la géométrie peut s'avérer avantageuse pour certains types de transducteurs dont l'élément actif est circulaire. Après s'être assuré que les deux méthodes donnaient des résultats comparables, les particularités de chacune d'elles nous ont conduits à les utiliser de façon complémentaire afin de bénéficier de leurs apports croisés. C'est ainsi que la méthode de développement en ondes planes est devenue un outil de compréhension et de conception des structures composites et de leurs cellules élémentaires. La robustesse et la flexibilité de la méthode des éléments finis en ont fait une méthode de simulation fine de structures périodiques complexes, plus dédiée à l'analyse, mais dont les évolutions devraient conduire à une banalisation de l'utilisation pour des tâches plus systématiques.

Sur la base d'une structure composite 2-2 (une périodicité) nous avons validé les principes de calculs de l'analyse harmonique. D'une part nous avons illustré l'influence des différents paramètres géométriques sur le comportement du composite. D'autre part, il a été montré qu'à partir de la description d'une seule cellule "mécanique", il est possible de remonter au comportement d'un transducteur dont le pixel "électrique" regroupe plusieurs périodes de la structure. La confrontation à l'expérience à l'aide d'un composite bipériodique fabriqué par Framatome-ANP a confirmé la pertinence de l'approche grâce à une corrélation des résultats théoriques et expérimentaux tout à fait satisfaisante. Cet accord a été obtenu après le recalage des constantes de cisaillement du polymère constituant la matrice du composite, par comparaison des admittances mutuelles théoriques et expérimentales. La procédure inverse, consistant à mesurer les admittances mutuelles dans une sonde, puis à calculer l'admittance harmonique expérimentale par transformée de Fourier inverse, pourrait permettre un recalage plus facile et sur plus de paramètres si l'on sait quelle constante agit sur quel mode. L'analyse harmonique nous a permis de mener une étude approfondie du comportement d'un composite 1-3 en vibration dans le vide puis en immersion dans un bain d'huile, étude complétée par une identification des modes susceptibles de se propager dans un tel composite. Les premiers jalons d'analyse d'une sonde commerciale 1D de Parallel Design SAS ont été posés, en mettant en évidence d'abord l'influence des composants de la sonde. Si l'on s'est fondé sur l'analyse de l'admittance pour étudier le comportement des structures composites, l'autre grandeur significative de la qualité d'une sonde est la pression, que ce soit pour caractériser son efficacité en émission ou sa sensibilité en réception. Dans ce sens, on a calculé les fonctions de transfert en émission et en réception de la sonde pour des conditions de branchement bien définies.

Au-delà d'une méthode de calcul des grandeurs mutuelles, l'analyse harmonique s'est révélée particulièrement enrichissante quant au comportement global des structures périodiques. Elle permet d'identifier la nature des modes contribuant aux grandeurs mutuelles et peut aussi donner une idée de l'origine des différentes contributions spectrales aux modes de la structure considérée finie. Associée à la méthode des éléments finis, elle peut s'appliquer à un ensemble de structures périodiques très variées. Parmi celles-ci, les transducteurs micro-usinés sur silicium ont retenu notre attention puisqu'ils pourraient, dans les années à venir, devenir une technologie de première importance dans le domaine des sondes ultrasonores. Grâce à l'approche périodique, nous avons pu donner une explication tangible et analytique du comportement de ce nouveau type de transducteurs dans leur régime de fonctionnement linéaire, quand d'autres méthodes théoriques plus classiques sont incapables de fournir une explication objective des phénomènes mis en évidence. C'est ainsi que nous avons montré l'existence de différents modes couplés par le fluide dans la bande passante des réseaux composés de transducteurs micro-usinés.

L'analyse harmonique a démontré et confirmé un caractère avantageux des composites : la vibration utile, le mode d'épaisseur, est située dans une bande d'arrêt de la structure (dans l'hypothèse où les dimensions sont correctement choisies). Une part de l'optimisation des composites consiste alors à élargir le plus possible cette bande afin de découpler au maximum le mode d'épaisseur des autres modes se propageant dans le réseau. Nous avons développé, au travers de la méthode de développement en ondes planes, une nouvelle approche permettant d'étudier la structure de bandes d'un composite en fonction de ses caractéristiques géométriques, quelles que soient la direction de propagation et la polarisation des ondes qui s'y propagent. Cette optimisation nécessite en parallèle la recherche de nouvelles techniques de fabrication, et nous avons démontré la faisabilité de fabriquer des composites présentant des motifs non standards au moyen de deux techniques différentes. Le microsablage, en collaboration avec l'EPFL, permet d'obtenir des motifs à haut facteur de forme, même si l'obtention de flancs verticaux s'avère délicate et demande quelques étapes pour régler le banc de sablage. Cette technique permet aussi d'obtenir, de façon intrinsèque, des plots en forme de bouteille, qui pourrait s'avérer avantageuse en termes de conversion électromécanique et de perte acoustique par rayonnement en face arrière. Ce résultat inattendu est une piste à suivre à l'avenir. D'autre part, l'usinage abrasif par ultrasons a fait preuve d'un très grand potentiel, notamment en matière de conservation de la forme de départ sur toute la hauteur du motif, pour peu que l'on soit capable de fabriquer l'outil. Quelques alternatives ont été proposées dans ce sens. Ces premiers pas exploratoires dans la recherche de technologies alternatives, collectives et bas-coûts appellent à poursuivre l'investigation de technologies innovantes au sein d'un projet à plus grande échelle, qui fixera notamment des exigences objectives pour la fabrication de démonstrateurs et la comparaison leurs caractéristiques respectives (respect du motif de départ, couplage, etc.).

Grâce à l'introduction de concepts issus de fructifications croisées, nous avons élaboré de nouvelles stratégies de conception. Ainsi, nous avons fait appel à des notions issues du domaine des ondes de surface et du domaine des structures à bandes d'arrêt (ou cristaux phononiques) pour analyser et comprendre le comportement de nos structures. Ces mêmes notions permettent maintenant de proposer des solutions pour s'affranchir des vibrations parasites, comme par exemple l'exploitation des bandes d'arrêt des structures en question.

Nous avons franchi une étape fondamentale dans la compréhension du comportement des sondes ultrasonores et de leurs composants actifs. Après avoir acquis cette expertise sur les structures dédiées à l'imagerie et au CND, la phase suivante est l'amélioration des sondes. Pour ce faire, il faut maintenant définir concrètement des facteurs de mérite pertinents qui rendent compte des critères d'optimisation de celles-ci.

Citons parmi ces critères : les fonctions de transfert en émission, réception, ou en mode pulse-écho qui conditionnent la réponse temporelle de la sonde, le rendement du transducteur (pertes d'insertion), le champ rayonné et sa fonction de directivité, ou encore le coefficient de réflexion. Parallèlement, il faut définir objectivement et rigoureusement dans quelles conditions on détermine ces facteurs de mérite, autrement dit le protocole expérimental associé. Ces conditions sont notamment les conditions électriques auxquelles est soumis chaque élément de la sonde en émission comme en réception. Ce sera aussi la nature de la cible et sa distance pour les facteurs de mérite définis en mode émission/réception, ou encore la nature du milieu de rayonnement pour une caractérisation en transmission.

Le deuxième objectif est de modéliser les transducteurs en sortie des traitements effectués par les échographes, c'est-à-dire tenir compte de l'électronique d'excitation et de détection. Cette phase est nécessaire afin d'optimiser les systèmes d'échographie dans leur globalité. On ne peut en effet échapper à terme à devoir mener une analyse système, en particulier dans le cas des transducteurs micro-usinés dont un des avantages réside dans la compatibilité avec les technologies de la micro-électronique. Les grandeurs mutuelles, variables quelle que soit la figure d'excitation et de charge, sont particulièrement adaptées pour mener ce type d'analyse.

A plus long terme, et pour rendre compte de tous les aspects du système, il restera à prolonger la chaîne de modélisation jusqu'à la simulation des images obtenues, ce qui permettra d'observer l'impact des différents paramètres d'une sonde sur la qualité de l'image. On pourra alors prétendre bénéficier d'un laboratoire virtuel [97] dans lequel tous les aspects (mécaniques, électriques) seront pris en compte. Analyser et améliorer le système impliquera alors la mise en place de nouvelles stratégies d'optimisation couplant électronique de synthèse de l'excitation, électronique de puissance, acousto-électricité et enfin traitement du signal et synthèse d'image.

Il restera enfin à intégrer certains aspects à nos modèles (problèmes non-linéaires, problèmes de dimensions finies) afin de compléter un outil déjà bien implanté chez nos partenaires industriels.

Pour finir, on a déjà mentionné le fait que l'analyse harmonique est riche d'enseignements. Elle ne se borne pas aux seules sondes ultrasonores pour l'imagerie et s'avère applicable à toutes sortes de structures du moment qu'elles soient périodiques et planes.

Ce type d'analyse pourrait donc être profitable à d'autres domaines d'applications. On pense bien sûr aux cristaux phononiques qui peuvent bénéficier pleinement de nos efforts de modélisation. Ce n'est finalement qu'un retour aux sources qui permet d'ouvrir le domaine des cristaux phononiques aux matériaux piézoélectriques, notamment pour la propagation d'ondes de surface [73].

Enfin, on pense aussi aux transducteurs micro-usinés sur silicium qui sont susceptibles de trouver leur place dans d'autres domaines tels que la microfluidique (déplacement de particules en suspension dans des microcanaux) ou encore les microsystèmes pour la biologie pour des applications capteurs par exemple.

La puissance de la méthode des éléments finis permet d'envisager de nouvelles structures, associant des matériaux de natures différentes et variées, sans véritables limitations en complexité grâce aux éléments de frontière rendant compte de façon précise et robuste des phénomènes de propagation, guidage, rayonnement d'ondes. La flexibilité des outils mis en œuvre ouvre de larges perspectives aussi bien pour l'analyse physique que pour la conception de nouvelles fonctions. Plus généralement, nous avons développé de nouvelles approches de traitement des problèmes de l'acousto-électricité dont les domaines d'application s'étendent de l'échographie aux composants radiofréquences de traitement du signal, avec de futures extensions aux microsystèmes fondés sur la microsonique.

Annexe A

Problème fluide/structure : formulation intégrale sur la frontière

Dans la section 5.4.2, on a introduit un coefficient $\frac{1}{2}$ et plus généralement $c(M)$ lors de l'expression de la pression, avec $c(M)$ égal à $\frac{1}{2}$ lorsque M appartient à l'interface structure-fluide. Dans ce qui suit, on donne une démonstration plus rigoureuse de l'origine de ce coefficient en étudiant le cas tri-dimensionnel dans le cas où $c(M) = \frac{1}{2}$.

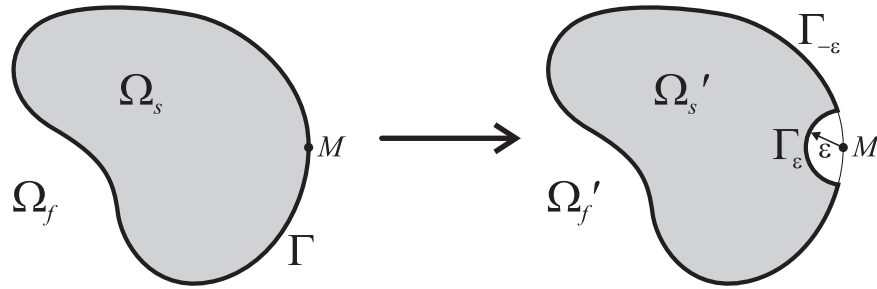


FIG. A.1 – Modification du domaine fluide initial Ω_f quand le point M est sur l'interface Γ .

Soit M un point de l'interface, on agrandit le domaine fluide Ω_f afin d'y inclure une sphère de rayon ε centrée sur M (voir figure A.1). On appelle ce nouveau domaine Ω'_f et sa frontière $\Gamma' = \Gamma_{-\varepsilon} \cup \Gamma_{\varepsilon}$.

Dans le domaine agrandi Ω'_f , on peut réécrire l'équation (5.71) :

$$p(M) + \int_{N \in \Gamma_{-\varepsilon} \cup \Gamma_{\varepsilon}} p(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_N} dS = \int_{N \in \Gamma_{-\varepsilon} \cup \Gamma_{\varepsilon}} \frac{\partial p(N)}{\partial n_N} G(M, N) dS, \quad (\text{A.1})$$

qui vaut pour M appartenant au nouveau domaine. On doit maintenant étudier le comportement de cette équation lorsque ε tend vers 0^+ .

On étudie d'abord :

$$\begin{aligned}
 \int_{N \in \Gamma_\varepsilon} p(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_N} dS &= \int_{\Gamma_\varepsilon} p \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \exp(-jkr) \right) dS \\
 &\quad \text{avec } r \text{ la distance entre } M \text{ et } N, \\
 &= \int_{\Gamma_\varepsilon} p \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r} \exp(-jkr) \right) dS \\
 &\quad \text{puisque } \frac{\partial}{\partial n} \equiv \frac{\partial}{\partial r} \text{ sur } \Gamma_\varepsilon, \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} p \left(-\frac{1}{r^2} \exp(-jkr) + \frac{1}{r} (-jk) \exp(-jkr) \right) dS, \\
 &= -\frac{1+jk\varepsilon}{4\pi\varepsilon^2} \exp(-jk\varepsilon) \int_{\Gamma_\varepsilon} p dS \\
 &\quad \text{puisque } r = \varepsilon \text{ sur } \Gamma_\varepsilon, \\
 &\rightarrow -\frac{1+jk\varepsilon}{4\pi\varepsilon^2} \exp(-jk\varepsilon) p(M) 2\pi\varepsilon^2 \\
 &\quad \text{par le théorème des valeurs moyennes.}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Ainsi, à la limite :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{N \in \Gamma_\varepsilon} p(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_N} dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1+jk\varepsilon}{4\pi\varepsilon^2} \exp(-jk\varepsilon) p(M) 2\pi\varepsilon^2 \right), \\
 &= -\frac{p(M)}{2}.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{N \in \Gamma_\varepsilon} \frac{\partial p(N)}{\partial n_N} G(M, N) dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} \exp(-jk\varepsilon) \frac{\partial p}{\partial n}(M) 2\pi\varepsilon^2 \right), \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} \exp(-jk\varepsilon) \varepsilon \frac{\partial p}{\partial n}(M) \right), \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Il reste les intégrales sur $\Gamma_{-\varepsilon}$ qui tendent vers les intégrales sur Γ pour les fonctions admissibles.

En combinant les équations (A.1), (A.3) et (A.4), on obtient :

$$p(M) - \frac{p(M)}{2} + \int_{N \in \Gamma} p(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_N} dS = \int_{N \in \Gamma} \frac{\partial p(N)}{\partial n_N} G(M, N) dS, \tag{A.5}$$

i.e. :

$$\frac{p(M)}{2} = \int_{N \in \Gamma} \frac{\partial p(N)}{\partial n_N} G(M, N) dS - \int_{N \in \Gamma} p(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_N} dS, \tag{A.6}$$

avec M sur l'interface.

Annexe B

Expression analytique de $I_{(\gamma_1+p, \gamma_2+q)}^{(\mu, \epsilon)}$ pour les éléments de frontière triangle linéaire

On effectue les intégrales sur l'élément de référence. On fait donc intervenir une interpolation géométrique et une interpolation physique. L'élément triangle linéaire (voir figure B.1) est isoparamétrique, ses polynômes d'interpolations géométrique et physique sont notés N_μ avec :

$$\begin{cases} N_1 &= 1 - \xi_1 - \xi_2 \\ N_2 &= \xi_1 \\ N_3 &= \xi_2 \end{cases} . \quad (\text{B.1})$$

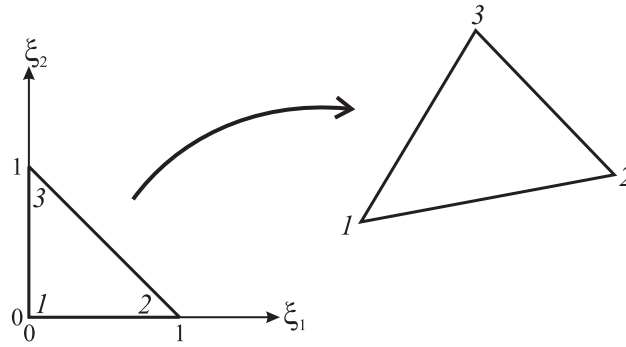


FIG. B.1 – Element triangle linéaire et son élément de référence.

Pour tout élément ϵ , noeud μ , et tous paramètres d'excitation γ_1 et γ_2 , on se trouve à calculer une intégrale du type :

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} (a + b\xi_1 + c\xi_2) e^{j(m+n\xi_1+p\xi_2)} d\xi_2 d\xi_1 , \quad (\text{B.2})$$

avec :

$$a + b\xi_1 + c\xi_2 = N_\mu(\xi_1, \xi_2) \det J_\epsilon , \quad (\text{B.3})$$

et

$$m + n\xi_1 + p\xi_2 = \frac{2\pi}{d_1}(\gamma_1 + p) N_i(\xi_1, \xi_2) x_1^{i(\epsilon)} + \frac{2\pi}{d_2}(\gamma_2 + q) N_j(\xi_1, \xi_2) x_2^{j(\epsilon)} . \quad (\text{B.4})$$

J_ε est le jacobien de la transformation qui à l'élément de référence associe l'élément ε , soit :

$$J_\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi_1} & N_{2,\xi_1} & N_{3,\xi_1} \\ N_{1,\xi_2} & N_{2,\xi_2} & N_{3,\xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{1(\varepsilon)} & x_2^{1(\varepsilon)} \\ x_1^{2(\varepsilon)} & x_2^{2(\varepsilon)} \\ x_1^{3(\varepsilon)} & x_2^{3(\varepsilon)} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Un logiciel de calcul formel (ici Mapple) nous donne l'expression générale de l'intégrale (que l'on pourrait résoudre à la main avec un peu de patience) :

$$I = e^{jm} \left[\frac{e^{jn}}{n^2(n-p)^2} ((a+b)n(p-n) + j(bp+cn-2bn)) + \frac{e^{jp}}{p^2(p-n)^2} ((a+c)p(n-p) + j(bp+cn-2cp)) - \frac{1}{n^2p^2} (anp + j(bp+cn)) \right]. \quad (\text{B.6})$$

Si $n = 0$:

$$I = \frac{e^{jm}}{2p^3} [2p(a+b-c - e^{jp}(a+c)) + j(p^2(2a+b) + 2(2c-b)(1-e^{jp}))], \quad (\text{B.7})$$

si $p = 0$:

$$I = \frac{e^{jm}}{2n^3} [2n(a+c-b - e^{jn}(a+b)) + j(n^2(2a+c) + 2(2b-c)(1-e^{jn}))], \quad (\text{B.8})$$

si $p = n$:

$$I = \frac{e^{jm}}{2n^3} [2(an + j(b+c))(1-e^{jn}) + e^{jn}(-2n(b+c) + jn^2(2a+b+c))], \quad (\text{B.9})$$

enfin, si $p = n = 0$:

$$I = \frac{1}{6} e^{jm} (3a+b+c). \quad (\text{B.10})$$

Annexe C

Réseaux périodiques

On s'efforce dans cette section de donner quelques éléments fondamentaux sur les réseaux périodiques. Pour plus de détails on se reportera au livre de L. Brillouin [33] sur la propagation des ondes dans les structures périodiques.

C.1 Réseaux directs et réseaux réciproques

Un réseau périodique est caractérisé par des vecteurs de translations élémentaires que nous noterons \mathbf{a}_i . Le réseau est alors invariant par toute translation de vecteur ($\mathbf{t}(m_i) = m_i \mathbf{a}_i$) où les coefficients m_i sont des entiers. Les vecteurs \mathbf{a}_i sont aussi appelés vecteurs de base du réseau direct.

Pour chaque réseau direct on peut définir un réseau réciproque de vecteurs de base \mathbf{a}_i^* . Brillouin entre autres définit le réseau réciproque par :

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j^* = \delta_{ij} , \quad (\text{C.1})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. D'autres le définissent avec une autre norme telle que :

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j^* = 2\pi \delta_{ij} . \quad (\text{C.2})$$

Dans le chapitre 6 sur la méthode de développement en ondes planes, les vecteurs du réseau réciproque notés \mathbf{G} obéissent à cette dernière définition.

C.2 Zones de Brillouin

Dans le cas des structures périodiques, on montre que la fréquence d'une onde est une fonction périodique du nombre d'onde. Ainsi, pour une fréquence donnée, il y a ambiguïté sur la valeur de la longueur d'onde et sur la direction de propagation.

Dans le cas unidimensionnel, on choisit un intervalle contenant une période et centré sur l'origine. On restreint les valeurs du nombre d'onde à cet intervalle, appelé première zone de Brillouin. On définit aussi une seconde zone, une troisième, etc.

Dans le cas de structures bi-périodiques, on définit de même des zones dites de Brillouin. Ces zones sont définies dans le réseau réciproque, puisque celui-ci décrit la périodicité de la fréquence, fonction périodique du nombre d'onde (inverse de la longueur d'onde).

On montre comment construire géométriquement la première zone de Brillouin. L'origine est placée au

centre de la zone. On trace ensuite les bissectrices des vecteurs du réseau réciproque partant de l'origine. Le plus petit polygone formé par ces lignes définit la première zone de Brillouin, qui a la même surface que la cellule élémentaire du réseau réciproque (voir Fig. C.1).

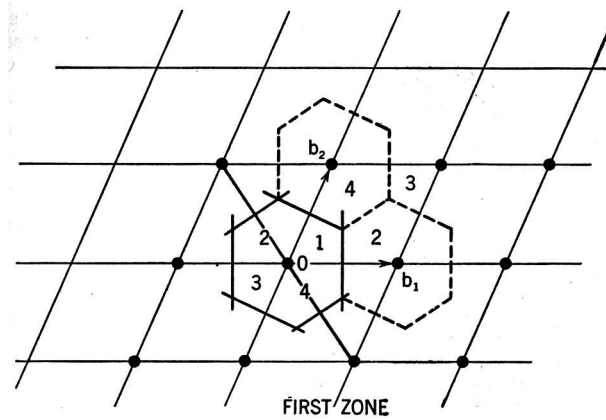


FIG. C.1 – Construction de la première zone de Brillouin pour un réseau bi-périodique. Tiré de [33].

La construction des zones d'ordre supérieur est plus complexe et n'est pas détaillée ici. Elles sont limitées par les bissectrices mentionnées auparavant et ne doivent pas être traversées par l'une d'elles. La figure C.2 représente les trois premières zones de Brillouin dans le cas d'un réseau bi-périodique quelconque dont on connaît le réseau réciproque.

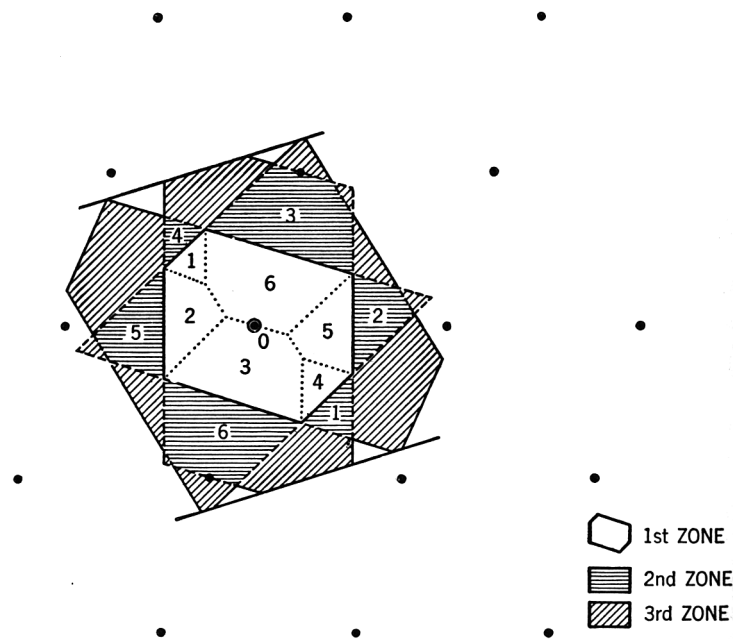


FIG. C.2 – Trois premières zones de Brillouin pour un réseau quelconque. Tiré de [33].

Si une onde se propage dans le réseau, dont le vecteur d'onde, pris depuis l'origine, traverse une bissectrice, une discontinuité intervient dans le tracé de la fréquence en fonction du nombre d'onde. Restreindre le tracé aux zones de Brillouin élimine les discontinuités en dehors des frontières.

Chaque zone a la même surface que la cellule élémentaire et peut être ramenée à la première zone de Brillouin en considérant chacune de ses parties et en leur appliquant une translation suivant un vecteur du réseau réciproque.

Les figures C.3, C.4 et C.5 montrent les zones de Brillouin pour des réseaux particuliers.

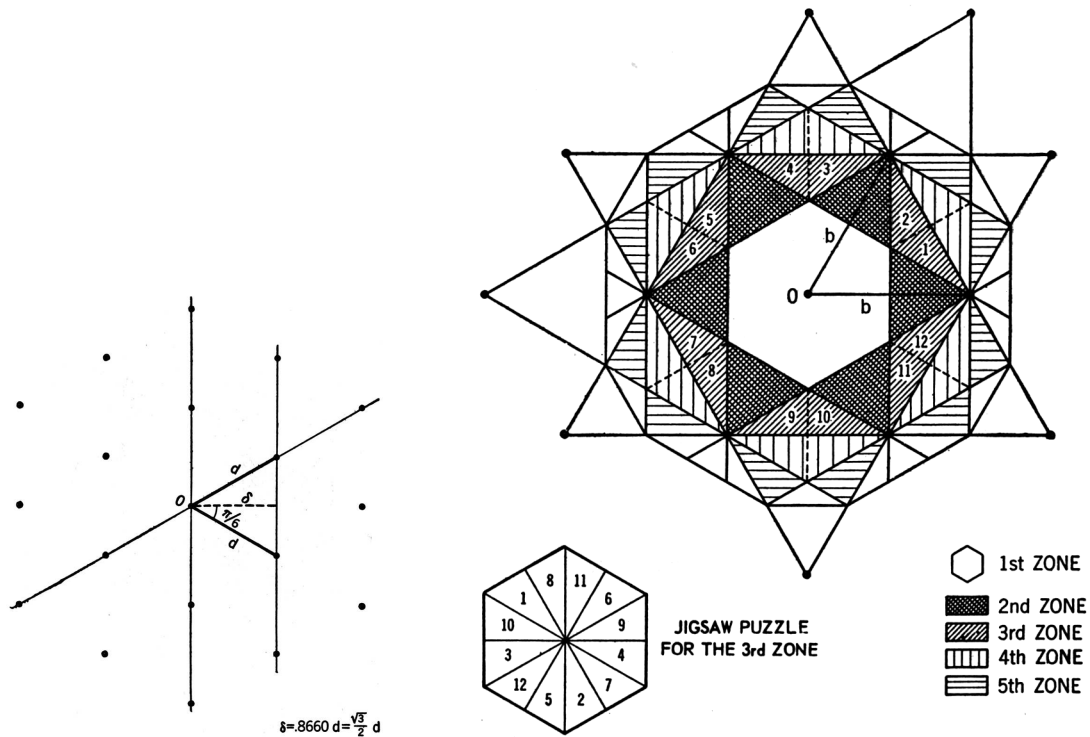


FIG. C.3 – Zones de Brillouin pour un réseau hexagonal. Tiré de [33].

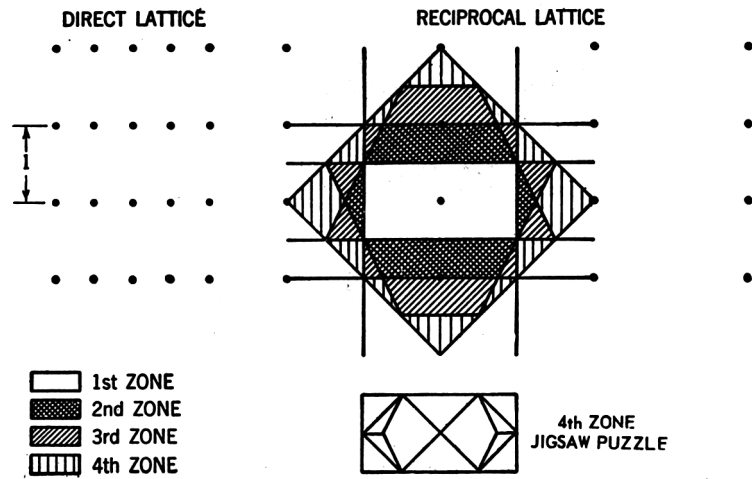


FIG. C.4 – Zones de Brillouin pour un réseau rectangulaire. Tiré de [33].

C.3 Expression des vecteurs d'ondes

Les courbes de dispersion $f(\mathbf{k})$ sont construites sur la première zone de Brillouin. La fréquence f est une fonction paire du nombre d'onde $k/2\pi$ de telle sorte que l'étude peut être restreinte aux nombres d'onde positifs. Par exemple dans le cas d'une cellule rectangulaire, on peut réduire l'étude au quart supérieur droit de la première zone de Brillouin (k_1 et k_2 positifs). Le centre de la zone de Brillouin correspond au vecteur d'onde $\mathbf{k} = 0$. La bordure de la zone de Brillouin correspond au vecteur d'onde \mathbf{k} sur la frontière de la première zone de Brillouin, pour une direction donnée de \mathbf{k} .

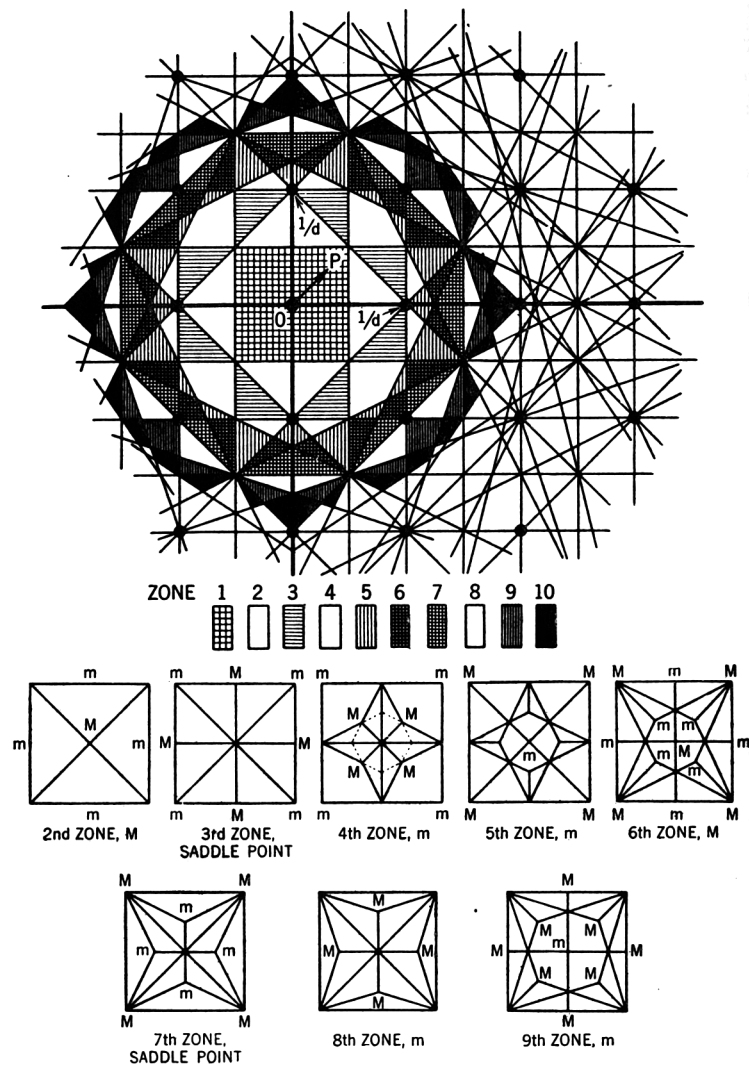


FIG. C.5 – Zones de Brillouin pour un réseau carré. Tiré de [33].

Traisons par exemple le cas d'une cellule rectangulaire de côtés d_1 suivant x_1 et d_2 suivant x_2 . Si le vecteur d'onde \mathbf{k} est extérieur à la zone de Brillouin, alors il peut s'écrire :

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T = \left(k_1^0 + \frac{2\pi m}{d_1}, k_2^0 + \frac{2\pi n}{d_2} \right)^T, \quad (\text{C.3})$$

où le vecteur $(k_1^0, k_2^0)^T$ appartient à la première zone de Brillouin et m et n sont des entiers relatifs. Les déphasages $\varphi_{\mathbf{a}_1}$ et $\varphi_{\mathbf{a}_2}$ des points distants des vecteurs de base du réseau direct sont donnés par :

$$\varphi_{\mathbf{a}_1} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_1 = k_1^0 d_1 + 2\pi m, \quad (\text{C.4})$$

$$\varphi_{\mathbf{a}_2} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2 = k_2^0 d_2 + 2\pi n, \quad (\text{C.5})$$

soit encore :

$$\varphi_{\mathbf{a}_1} = 2\pi \gamma_1 + 2\pi m, \quad (\text{C.6})$$

$$\varphi_{\mathbf{a}_2} = 2\pi \gamma_2 + 2\pi n, \quad (\text{C.7})$$

où γ_1 et γ_2 sont les paramètres d'excitation définis dans la section 5.3.1.

Dans le cas général, le vecteur \mathbf{k} s'écrit :

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}^0 + m_i \mathbf{a}_i^*, \quad (\text{C.8})$$

et les déphasages deviennent :

$$\varphi_{\mathbf{a}_i} = 2\pi \gamma_i + 2\pi m_i = 2\pi(\gamma_i + m_i). \quad (\text{C.9})$$

Dans le cas de la cellule rectangulaire et pour un matériau homogène et non dispersif, les courbes de dispersion sont alors construites dans la première zone de Brillouin par :

$$\omega_{m,n} = k V = \sqrt{\left(k_1^0 + \frac{2\pi m}{d_1} \right)^2 + \left(k_2^0 + \frac{2\pi n}{d_2} \right)^2} V. \quad (\text{C.10})$$

Si on ajoute une inclusion dans la cellule élémentaire, tout point en bordure de la zone de Brillouin se sépare en plusieurs points. On parle alors de *levée de dégénérescence*. Lorsque le matériau est homogène, chaque point de la bordure de la zone de Brillouin est double et les vibrations associées sont identiques à une translation près, d'un quart de longueur d'onde suivant la direction du vecteur d'onde [31]. Le réseau d'inclusions est alors responsable de la levée de dégénérescence. Si pour la première vibration l'inclusion est sur un noeud de vibration, alors elle est sur un ventre de vibration pour la deuxième. La différence de déformations de l'inclusion dans les deux cas engendre une différence de pulsations et donc une levée de dégénérescence.

La figure C.6 illustre ce phénomène pour un composite 1-3 laiton-aluminium.

Enfin la figure C.7 montre le repliement des courbes de dispersion dans la première zone de Brillouin dans le cas général d'un réseau 1D.

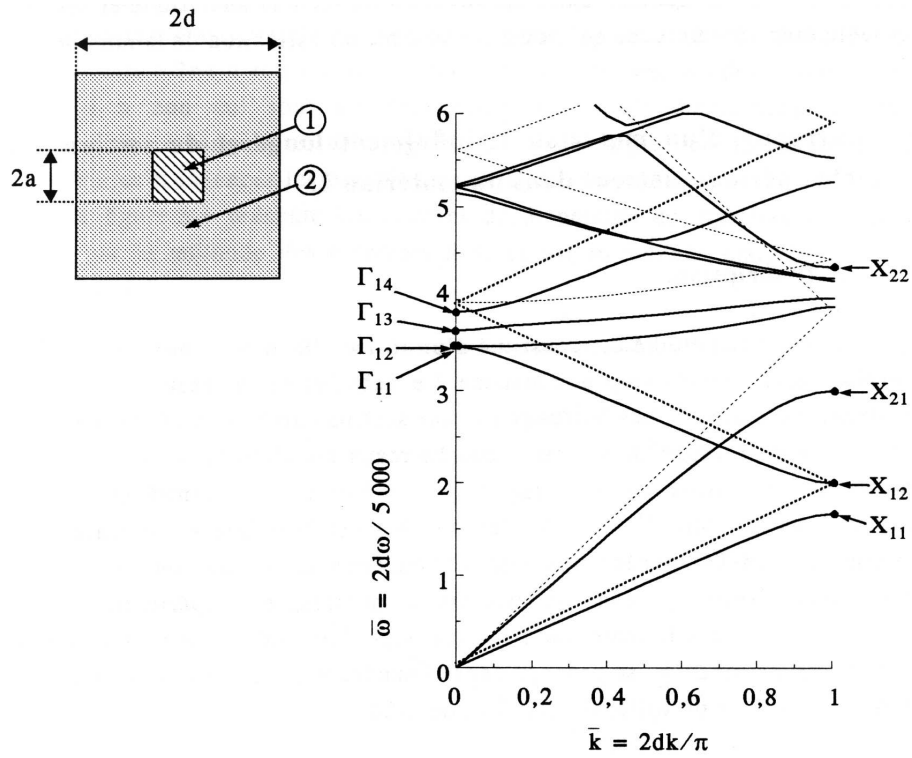


FIG. C.6 – Courbes de dispersion d'un composite 1-3 laiton-aluminium. Le rapport a/d vaut $1/3$. Les traits pointillés montrent les courbes de dispersion pour le matériau homogène de la matrice. Le réseau d'inclusions a pour conséquence la séparation des branches sur la bordure de la zone de Brillouin. D'après [31].

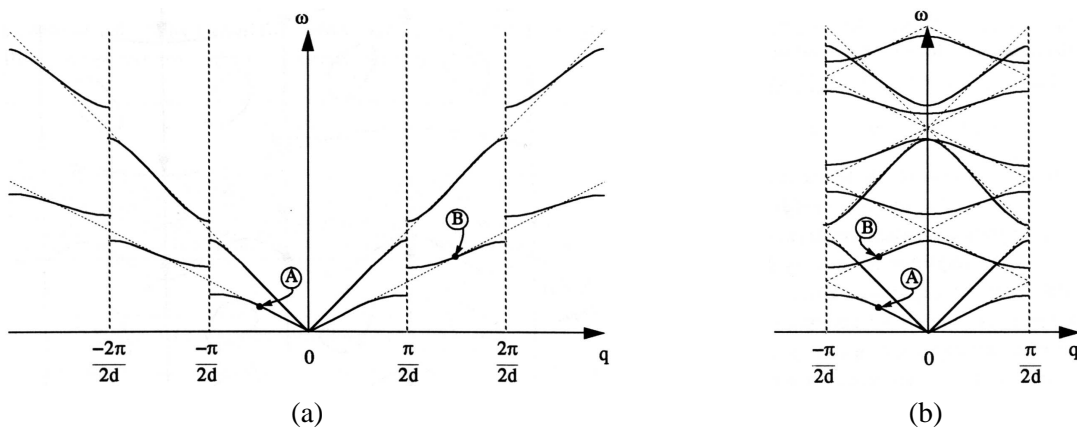


FIG. C.7 – Exemple de repliement des courbes de dispersion (a) dans la première zone de Brillouin (b). D'après [31].

Annexe D

Calcul des constantes du P160

Pour le PZT P1-60 dont le fabricant Quartz et Silice ne donne pas les tenseurs complets des constantes matériaux, on donne ici les relations qui nous ont permis de les reconstituer (en dehors de quelques coefficients estimés "à la louche").

Ainsi on a les relations :

$$\rho V^2 = c_{33}^D = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S}, \quad (\text{D.1})$$

$$e_{nj} = d_{ni} c_{ij}^E, \quad (\text{D.2})$$

en particulier :

$$e_{33} = 2 d_{31} c_{13}^E + d_{33} c_{33}^E, \quad (\text{D.3})$$

$$\Delta\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^T - \varepsilon_{33}^S = d_{3\alpha} e_{3\alpha} = 2 d_{31} e_{31} + d_{33} e_{33}, \quad (\text{D.4})$$

et :

$$k_t^2 = \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S c_{33}^E + e_{33}^2}. \quad (\text{D.5})$$

(D.5) implique :

$$c_{33}^E = \frac{1 - k_t^2}{k_t^2} \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S}, \quad (\text{D.6})$$

puis avec (D.1) :

$$\rho V^2 = \frac{1}{k_t^2} \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S}, \quad (\text{D.7})$$

i.e. :

$$e_{33} = \sqrt{\varepsilon_{33}^S \rho k_t} V. \quad (\text{D.8})$$

On déduit e_{33} de cette dernière relation, puis e_{31} de (D.4), c_{33}^E de (D.6) et c_{13}^E de (D.3).

On a ensuite :

$$c_{\alpha\beta}^E s_{\beta\gamma}^E = \delta_{\alpha\gamma}, \quad (\text{D.9})$$

soit encore :

$$c_{11}^E s_{11}^E + c_{12}^E s_{12}^E + c_{13}^E s_{13}^E = 1, \quad (\text{D.10})$$

$$2 c_{13}^E s_{13}^E + c_{33}^E s_{33}^E = 1, \quad (\text{D.11})$$

$$c_{66}^E s_{66}^E = 1, \quad (\text{D.12})$$

ce qui implique :

$$2(c_{11}^E s_{11}^E + c_{12}^E s_{12}^E) - c_{33}^E s_{33}^E = 1, \quad (\text{D.13})$$

$$(c_{11}^E - c_{12}^E)(s_{11}^E - s_{12}^E) = 1. \quad (\text{D.14})$$

Or le fabricant donne les modules d'Young et le coefficient de Poisson définis par :

$$Y_{ii} = (s_{ii})^{-1}, \quad (\text{D.15})$$

$$\sigma = -\frac{s_{12}}{s_{11}}, \quad (\text{D.16})$$

d'où :

$$2(c_{11}^E - \sigma^E c_{12}^E)Y_{11}^{E-1} - c_{33}^E Y_{33}^{E-1} = 1, \quad (\text{D.17})$$

$$(c_{11}^E - c_{12}^E)(1 + \sigma^E)Y_{11}^{E-1} = 1. \quad (\text{D.18})$$

De ces deux dernières relations, on déduit c_{11}^E et c_{12}^E .

Les coefficients c_{55}^E , e_{15} et ε_{11}^S ne peuvent être déterminés d'après les données fournies par le fabricant. On s'inspire d'autres céramiques pour en fixer des valeurs approximatives.

Bibliographie

- [1] K. F. GRAFF : Ultrasonics : historical aspects. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 1–10, 1977.
- [2] D. ROYER et E. DIEULESAINT : *Ondes élastiques dans les solides 2*. Masson, 1999.
- [3] D. ROYER et E. DIEULESAINT : *Elastic Waves in Solids 1*. Springer Verlag, 2000.
- [4] C. DESILETS, J. FRAZER et G. S. KINO : The design of efficient broadband piezoelectric transducers. *IEEE Trans. Son. Ultrason.*, 25:115–125, 1978.
- [5] B. A. J. ANGELSEN, éditeur. *Ultrasound Imaging - Waves, Signals, and Signal Processing - Vol I*. Emantec AS, Trondheim, Norway, 2000.
- [6] J. POGUET, J. MARGUET, F. PICHONNAT et L. CHUPIN : La technologie phased array : concepts, capteurs et applications. *NDT.net*, 6(8), 2001.
- [7] J. D. LARSON : Non-ideal radiators in phased array transducers. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 673–684, 1981.
- [8] L. J. ZIOMEK : *Fundamentals of acoustic field theory and space-time signal processing*, chapitre 7. CRC Press, 1995.
- [9] C. MADHAVAN, T. R. GURURAJA, T. T. SRINIVASAN, Q. C. XU et R. E. NEWNHAM : Fired 0-3 piezoelectric composite materials for biomedical ultrasonic imaging applications. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium, Denver, Colorado*, pages 645–650, 1987.
- [10] T. MATSUNAKA, Y. TABUCHI, C. KASAI, K. TACHIKAWA, H. KYONO et H. IKEDA : Porous piezoelectric ceramic transducer for medical ultrasonic imaging. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium, Chicago, Illinois*, pages 681–684, 1988.
- [11] T. R. GURURAJA, W. A. SCHULZE, L. E. CROSS, R. E. NEWNHAM, B. A. AULD et Y. J. WANG : Piezoelectric composite materials for ultrasonic transducer applications. part i : resonant modes of vibration of PZT rod-polymer composites. *IEEE Trans. Son. Ultrason.*, 32(4):481–498, 1985.
- [12] R.E. NEWNHAM, D.P. SKINNER et L.E. CROSS : Connectivity and piezoelectric-pyroelectric composites. *Materials Research Bulletin*, 13:525–536, 1978.
- [13] K. A. KLICKER, R. E. NEWNHAM, L. E. CROSS et J. V. BIGGERS : PZT composite and a fabrication method thereof. U.S. patent 4,412,148, 1983.
- [14] D. J. WALLER, A. SAFARI, R. J. CARD et M. P. O'TOOLE : Lead zirconate titanate fiber/polymer composites prepared by a replication process. *J. Am. Ceram. Soc.*, 73(11):3503–3506, 1990.
- [15] W. WERSING : Composite piezoelectrics for ultrasonic transducers. *In Proc. of the IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics, Pennsylvania*, pages 212–223, 1986.

- [16] S. WANG, J.-F. LI, R. WATANABE et M. ESASHI : Fabrication of lead zirconate titanate microrods for 1-3 piezocomposites using hot isostatic pressing with silicon molds. *J. Am. Ceram. Soc.*, 82(1):213–215, 1999.
- [17] Y. OHARA, M. MIYAYAMA, K. KOUMOTO et H. YANAGIDA : PZT-polymer composites fabricated with YAG laser cutter. *Sensors and Actuators A*, 40:187–190, 1994.
- [18] M. EYETT, D. BAEUERLE, W. WERSING et H. THOMANN : Excimer laser induced etching of ceramic lead titanate zirconate. *J. Appl. Phys.*, 62:1511–1514, 1987.
- [19] O. DUFAUD et S. CORBEL : Stereolithography of PZT ceramic suspensions. *Rapid Prototyping Journal*, 8(2):83–90, 2002.
- [20] H.P. SAVAKUS, K.A. KLICKER et R.E. NEWNHAM : PZT-epoxy piezoelectric transducers : A simplified fabrication procedure. *Materials Research Bulletin*, 16:677–680, 1981.
- [21] W.A. SMITH et B.A. AULD : Modeling 1-3 composite piezoelectrics : Thickness-mode oscillations. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, 38(1):40–47, 1991.
- [22] W. A. SMITH : The role of piezocomposites in ultrasonic transducers. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 755–766, 1989.
- [23] B. A. AULD, H. A. KUNKEL, Y. A. SHUI et Y. WANG : Dynamic behavior of periodic piezoelectric composites. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 554–558, 1983.
- [24] H. L. W. CHAN, J. UNSWORTH et T. BUI : Effect of ceramic anisotropy on the properties of ceramic/polymer piezoelectric composites. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 651–655, 1987.
- [25] A.-C. HLADKY-HENNION, R. BOSSUT, J.-N. DECARPIGNY et C. AUDOLY : Analysis of the scattering of a plane acoustic wave by a periodic elastic structure using the finite element method : application to compliant tube gratings. *J. Acoust. Soc. Am.*, 87:1861–1870, 1990.
- [26] A.-C. HLADKY-HENNION et J.-N. DECARPIGNY : Analysis of the scattering of a plane acoustic wave by a doubly periodic elastic structure using the finite element method : application to alberich anechoic coatings. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90:3356–3367, 1991.
- [27] A.-C. HLADKY-HENNION et J.-N. DECARPIGNY : Finite element modeling of active periodic structures : application to 1-3 piezocomposites. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(2):621–635, 1993.
- [28] D. CERTON, F. PATAT, F. LEVASSORT, G. FEUILLARD et B. KARLSSON : Lateral resonances in 1-3 piezoelectric periodic composite : Modeling and experimental results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(4):2043–2051, 1997.
- [29] D. CERTON, O. CASULA, F. PATAT et D. ROYER : Theoretical and experimental investigations of lateral modes in 1-3 piezocomposites. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, 44(3):643–651, 1997.
- [30] D. ROYER et E. DIEULESAINT : Optical detection of sub-angström transient mechanical displacements. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 527–530, 1986.
- [31] P. LANGLET : *Analyse de la Propagation Des Ondes Acoustiques Dans Les Matériaux Périodiques À L'aide de la Méthode Des Éléments Finis*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, France, 1993.

-
- [32] P. LANGLET, A.C. HLADKY-HENNION et J.N. DECARPIGNY : Analysis of the propagation of plane acoustic waves in passive periodic materials using the finite element method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98(5):2792–2800, 1995.
 - [33] L. BRILLOUIN : *Wave Propagation in Periodic Structures*. Dover, New York, 1953.
 - [34] L.E. KINSLER, A.R. FREY, A.B. COPPENS et J.V. SANDERS : *Fundamentals of Acoustics.*, chapitre 5. Wiley, 4th édition, 2000.
 - [35] G. S. KINO et R. BAER : Theory for cross-coupling. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 1013–1019, 1983.
 - [36] Y. ZHANG, J. DESBOIS et L. BOYER : Characteristic parameters of surface acoustic waves in a periodic metal grating on a piezoelectric substrate. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, 40(3):183–192, 1993.
 - [37] W. P. MASON : *Electromechanical transducers and wave filters*. Van Nostrand-Reinhold, 1948.
 - [38] R. KRIMHOLTZ, D. A. LEEDOM et G. L. MATTHAEI : New equivalent circuit for elementary piezoelectric transducers. *Electron. Lett.*, 6:398–399, 1970.
 - [39] P. LLOYD et M. REDWOOD : *J. Acoust. Soc. Am.*, 39:346, 1966.
 - [40] H. ALLIK et T. J. R. HUGUES : Finite element method for piezoelectric vibration. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2:151–157, 1970.
 - [41] J. GUYONVARCH, D. CERTON, L. RATSIMANDRESI, F. PATAT et M. LETHIECQ : Application of normal mode theory to modeling of cross-coupling in 1d piezocomposite arrays. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 973–976, 2001.
 - [42] B.A. AULD : *Acoustic Fields and Waves in Solids*. Krieger, Melbourne, FL, 2nd édition, 1990.
 - [43] ANSI/IEEE standard on piezoelectricity, std 176-1987. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, 43(5):717–772, 1996.
 - [44] M. BERNADOU : *Modulef, une bibliothèque modulaire d'éléments finis*. INRIA, 1988.
 - [45] B. PIRANDA : *Étude Du Rayonnement et Des Couplages Parasites sur Antennes Acoustiques Par Une Méthode Mixte Éléments Finis/Éléments de Frontière*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, France, 1998.
 - [46] H. F. TIERSTEN : Hamilton's principle for linear piezoelectric media. *Proc. IEEE*, 55:1523–1524, 1967.
 - [47] H. F. TIERSTEN : *Linear piezoelectric plate vibrations*. Plenum Press, 1969.
 - [48] E. P. EER NISSE : Resonances of one-dimensional composite piezoelectric and elastic structures. *IEEE Trans. Son. Ultrason.*, 14(2):59–67, 1967.
 - [49] E. P. EER NISSE : Variational method for electroelastic vibration analysis. *IEEE Trans. Son. Ultrason.*, 14(4):153–160, 1967.
 - [50] R. HOLLAND et E. P. EER NISSE : Variational evaluation of admittances of multielectroded three-dimensional piezoelectric structures. *IEEE Trans. Son. Ultrason.*, 14(2):59–67, 1967.
 - [51] J.-F. IMBERT : *Analyse des structures par éléments finis*. Cépaduès-éditions, 1995.
 - [52] J. MIKLOWITZ : *The theory of elastic waves and waveguides*. North-Holland, 1984.

- [53] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON et M. SANDS : *The Feynman lectures on physics*, volume 2, chapitre 19. Addison–Wesley, 1964.
- [54] R. COURANT et D. HILBERT : *Methods of mathematical physics*. Wiley, 1989.
- [55] P. C. Y. LEE : A variational principle for the equations of piezoelectromagnetism in elastic dielectric crystals. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 565–568, 1990.
- [56] R. HOLLAND : Representation of dielectric, elastic, and piezoelectric losses by complex coefficients. *IEEE Trans. SU*, 14(1):18–20, 1967.
- [57] T. A. DAVIS et I. S. DUFF : An unsymmetric-pattern multifrontal method for sparse LU factorization. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 18(1):140–158, 1997.
- [58] C. LESUEUR : *Rayonnement Acoustique des Structures.*, chapitre 3. Eyrolles, 1988.
- [59] V. P. PLESSKY et Th. THORVALDSSON : Periodic green’s functions analysis of SAW and leaky SAW propagation in a periodic system of electrodes on a piezoelectric crystal. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, 42(2):280–293, 1995.
- [60] P. VENTURA, J.-M. HODÉ et M. SOLAL : A new efficient combined FEM and periodic green’s function formalism for the analysis of periodic saw structures. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 263–268, 1995.
- [61] D. P. MORGAN : *Surface-wave devices for signal processing*, chapitre A, pages 328–329. Elsevier, 1991.
- [62] Th. PASTUREAUD, V. LAUDE et S. BALLANDRAS : Stable scattering-matrix method for surface acoustic waves in piezoelectric multilayers. *Appl. Phys. Lett.*, 80(14):2544–2546, 2002.
- [63] A. REINHARDT, Th. PASTUREAUD, S. BALLANDRAS et V. LAUDE : Scattering matrix method for modeling acoustic waves in piezoelectric, fluid, and metallic multilayers. *J. Appl. Phys.*, 94(10):6923–6931, 2003.
- [64] A.H. FAHMY et E.L. ADLER : Propagation of surface acoustic waves in multilayers : A matrix description. *Appl. Phys. Lett.*, 22:495–497, 1973.
- [65] E. L. ADLER : Matrix methods applied to acoustic waves in multilayers. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, 37(6):485–490, 1990.
- [66] J.O. VASSEUR, B. DJAFARI-ROUHANI, L. DOBRZYNSKI, M.S. KUSHWAHA et P. HALEVI : Complete acoustic band gaps in periodic fibre reinforced composite materials : The carbon/epoxy composite and some metallic systems. *J. Phys. : Condens. Matter.*, 6:8759–8770, 1994.
- [67] Y. TANAKA et S.-I. TAMURA : Acoustic stop bands of surface and bulk modes in two-dimensional phononic lattices consisting of aluminium and a polymer. *Phys. Rev. B*, 60(19):13294–13297, 1999.
- [68] J. O. VASSEUR, B. DJAFARI-ROUHANI, L. DOBRZYNSKI et P. A. DEYMIER : Acoustic band gaps in fibre composite materials of boron nitride structure. *J. Phys. : Condens. Matter*, 9:7327–7341, 1997.
- [69] M. WILM, A. KHELIF, S. BALLANDRAS, V. LAUDE et B. DJAFARI-ROUHANI : Out-of-plane propagation of elastic waves in two-dimensional phononic band-gap materials. *Phys. Rev. E*, 67(6), 2003.
- [70] R.C. PEACH : A general green function analysis for SAW devices. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 221–225, 1995.
- [71] M. WILM, S. BALLANDRAS, V. LAUDE et Th. PASTUREAUD : A full 3d plane-wave-expansion model for 1-3 piezoelectric composite structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(3):943–952, 2002.

-
- [72] Th. PASTUREAUD, V. LAUDE, A. SOUFYANE et S. BALLANDRAS : Stabilization of the simulation of SAW devices on stratified structures : Application to transverse plate mode resonators. *In Proc. of the IEEE Int. Freq. Control Symp.*, pages 661–665, 2001.
 - [73] V. LAUDE, M. WILM, S. BENCHABANE et A. KHELIF : Full band gaps for surface acoustic waves in piezoelectric phononic crystals. *In to be published in Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium 2004, Montréal, Canada, 2004.*
 - [74] S. BALLANDRAS, M. WILM, P-F. EDOA, A. SOUFYANE et V. LAUDE : Finite-element analysis of periodic piezoelectric transducers. *J. Appl. Phys.*, 93(1):702–711, 2003.
 - [75] A. ANGOT : *Compléments de Mathématiques À L'usage Des Ingénieurs de L'électrotechnique et Des Télécommunications*. Masson, 6th édition, 1982.
 - [76] S. BALLANDRAS, A. REINHARDT, A. KHELIF, M. WILM, V. LAUDE, W. DANIAU, V. BLONDEAU-PÂTISSIER et W. BOIREAU : Theoretical analysis of damping effects of SAW at solid/fluid interfaces. *In Proc. of the IEEE Int. Freq. Contr. Symp.*, pages 907–910, 2003.
 - [77] J. D. N. CHEEKE : *Fundamentals and applications of ultrasonic waves*. CRC Press, 2002.
 - [78] A. KHELIF, M. WILM, V. LAUDE et S. BALLANDRAS : Guided elastic waves along a rod defect of a two-dimensional phononic crystal. *Phys. Rev. E*, 69(6), 2004.
 - [79] M. I. HALLER et B. T. KHURI-YAKUB : A surface micromachined electrostatic ultrasonic air transducer. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 1241–1244, 1994.
 - [80] M. I. HALLER et B. T. KHURI-YAKUB : A surface micromachined electrostatic ultrasonic air transducer. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, 43(1):1–6, 1996.
 - [81] D. W. SCHINDEL, D. A. HUTCHINS, L. ZOU et M. SAYER : The design and characterization of micromachined air-coupled capacitance transducers. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, 42(1):42–50, 1995.
 - [82] T. H. GAN, D. A. HUTCHINS, D. R. BILLSON et D. W. SCHINDEL : High resolution air-coupled ultrasonic imaging of thin materials. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 897–900, 2002.
 - [83] J. S. MCINTOSH, D. A. HUTCHINS, D. R. BILLSON, R. A. NOBLE, R. R. DAVIES et L. KOKER : SAFT imaging using immersed capacitive micromachined ultrasonic transducers. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 1019–1022, 2002.
 - [84] Ö ORALKAN, A. SANLI ERGUN, J. A. JOHNSON, M. KARAMAN, U. DEMIRCI, K. KAVIANI, Th. H. LEE et B. T. KHURI-YAKUB : Capacitive micromachined ultrasonic transducers : Next-generation arrays for acoustic imaging ? *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, 49(11):1596–1610, 2002.
 - [85] D. M. MILLS et S. SMITH : Real-time in-vivo imaging with capacitive micromachined ultrasound transducer (cMUT) linear arrays. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 568–571, 2003.
 - [86] J. MCLEAN et F.L. DEGERTEKIN : Interdigital capacitive micromachined ultrasonic transducers for microfluidic applications. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 589–592, 2003.
 - [87] X. JIN, Ö ORALKAN, F. LEVENT DEGERTEKIN et B. T. KHURI-YAKUB : Characterization of one-dimensional capacitive micromachined ultrasonic immersion transducer arrays. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, 48(3):750–760, 2001.

- [88] S. BALLANDRAS, A. CARONTI, W. STEICHEN, M. WILM, V. LAUDE, Th. PASTUREAUD, R. LARDAT et W. DANIAU : Simulation of cMUT radiating in water using a mixed finite element/boundary element approach. *In Proc. of the IEEE Ultrasonics Symposium*, pages 1048–1051, 2002.
- [89] M. de LABACHELERIE, éditeur. *Techniques de fabrication des microsystèmes 2 : systèmes micro-électromécaniques 3D et intégration de matériaux actionneurs*. Lavoisier, 2004.
- [90] E. BELLOY, A. SAYAH et M.A.M. GIJS : Powder blasting for three-dimensional microstructuring of glass. *Sens. Actuators A, Phys.*, 86:231–237, 2000.
- [91] T. S. BALLER, G. G. P. van GORKOM, N. LAMBERT, E. A. MONTIE, P. H. F. TROMPENAARS et S. T. de ZWART : Construction and physical processing of zeus panels. *Philips J. Res.*, 50:463–474, 1996.
- [92] H. J. LIGTHART, P. J. SLIKKERVEER, F. H. in't VELD, P. H. W. SWINKELS et M. H. ZONNEVELD : Glass and glass machining in zeus panels. *Philips J. Res.*, 50:475–499, 1996.
- [93] E. BELLOY, A. SAYAH et M.A.M. GIJS : Oblique powder blasting for three-dimensional micromachining of brittle materials. *Sens. Actuators A, Phys.*, 92:358–363, 2001.
- [94] P. VAIRAC : *Microscopie acoustique à pointe vibrante : approche quantitative en mode de réflexion*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, France, 1996.
- [95] D. ROYER : Génération et détection optiques d'ondes élastiques. *Techniques de l'Ingénieur, traité Electronique*, page E 4 415.
- [96] D. ALLEN, H. ALMOND et P. LOGAN : A technical comparison of micro-electrodischarge machining, microdrilling and copper vapour laser machining for the fabrication of ink jet nozzles. *In Proc. of SPIE*, pages 531–540, 2000.
- [97] S. BALLANDRAS, M. WILM, V. LAUDE, W. DANIAU, K. DOGHECHE, Th. PASTUREAUD, R. LARDAT et W. STEICHEN : Toward a virtual laboratory for the design of acoustic imaging systems. *Revista de Acustica*, 33, 2002.

Résumé

Les développements à venir, tant dans le domaine de l'imagerie médicale que dans celui du contrôle non-destructif, sont conditionnés par les enjeux de l'imagerie tridimensionnelle "temps réel", parmi lesquels on peut identifier la conception de sondes ultrasonores à haute densité d'intégration et la création de nouvelles pratiques d'imagerie fondées sur des transducteurs polyvalents. Dans ce contexte, les sondes sont devenues des réseaux de plusieurs centaines, voire milliers, de transducteurs élémentaires, qui, d'une part, rendent les modèles unidimensionnels obsolètes, et, d'autre part, les modèles numériques trop lourds au premier abord. Lors de ces travaux de doctorat, nous avons élaboré de nouvelles stratégies de modélisation et de conception des sondes d'imagerie, fondées sur l'exploitation du caractère massivement périodique de telles structures.

Avec en ligne de mire les structures composites piézoélectriques qui constituent le cœur des sondes modernes, nous avons développé deux méthodes numériques complémentaires. La première est fondée sur une méthode éléments finis / éléments de frontière (FEA/BEM) qui permet de tenir compte, d'une part de la périodicité de la structure, d'autre part des milieux de propagation dans lesquels la structure rayonne. La deuxième méthode repose sur un développement en ondes planes et permet l'analyse des structures composites avec une approche différente qui est celle des structures à bandes d'arrêt encore appelées cristaux phononiques. Cette deuxième approche nous amène à imaginer des motifs qui diffèrent des classiques barreaux à section carrée et qui nécessitent d'explorer de nouvelles voies quant à la fabrication des composites. Des techniques de microsablage et d'usinage abrasif par ultrasons ont été testées en collaboration avec l'EPFL et le LCEP respectivement.

La flexibilité de la méthode dite FEA/BEM permet de simuler tous types de réseaux périodiques de transducteurs, en fournissant une analyse fine des phénomènes qui y prennent place et en offrant la capacité d'évaluer les effets de diaphonie entre les éléments du réseau. Cette démarche a été appliquée à une sonde commerciale 1-D, architecture qui constitue encore actuellement le quotidien des ingénieurs de conception, et à une architecture de type membranes micro-usinées sur silicium, qui constitue une révolution conceptuelle dans le domaine de l'imagerie.

Mots-clés: imagerie acoustique, réseau, transducteur, piézocomposite, éléments finis, ondes planes.

Abstract

Future developments in acoustic medical imaging and in non-destructive evaluation are conditioned by three-dimensional-imaging requirements, for instance high-density integrated probes and novel imaging practices. Ultrasound probes devoted to imaging applications have become arrays of hundreds or even thousands of elementary transducers, for which one-dimensional models are not well-suited and numerical methods can not be used without refinements. In this work, we study new strategies for modelling and designing imaging ultrasound probes, based on the statement that imaging devices are massively periodic.

With the underlying idea that modern ultrasound probes are manufactured on the basis of piezoelectric composite transducers, we propose two numerical methods. The first one is based on a finite-element analysis / boundary-element method (FEA/BEM) that takes into account the periodicity of the studied devices and the propagation media in which the structures radiate. The second method is based on a plane-wave expansion and it comes from the study of band-gap structures also-called phononic crystals. It provides one a different approach for the study of piezocomposites. This second approach is liable to lead one to design novel composite patterns that differ from the classical square-section rods of ceramic, and that require alternative fabrication techniques of piezocomposites. Powderblasting and ultrasound-micromachining techniques have been investigated with the EPFL and the LCEP respectively.

Thanks to its flexibility, the FEA/BEM allows one to simulate a large variety of transducer arrays. It provides an analysis of the phenomena that occur in such arrays and allows one to estimate cross-talk effects between the elementary transducers. This approach is applied to a 1-D commercial probe, which is nowadays the everyday life of designers, and to micromachined ultrasonic transducers that have appeared as a novel concept for imaging applications.

Keywords: acoustic imaging, array, transducer, piezocomposite, finite elements, plane waves.

